



Министерство образования и науки Российской Федерации



Государственная корпорация  
«Российская корпорация нанотехнологий»



Томский государственный университет  
систем управления и радиоэлектроники

**М.В. Черкашин, Л.И. Бабак**

# **ОСНОВЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ СВЧ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ УСТРОЙСТВ**

Учебное пособие

Модуль 5. Проектирование и моделирование СВЧ МИС,  
а также технологических процессов их производства

Томск  
2010

**Черкашин М.В., Бабак Л.И.**

Основы проектирования СВЧ полупроводниковых устройств : Учебное пособие / Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники. – Томск: 2010. – 57 с.: ил.

В учебном пособии представлена общая теория многополюсников. Основное внимание уделяется волновым параметрам многополюсников и их применению при расчете СВЧ цепей.

Для слушателей программы переподготовки в области промышленного производства наногетероструктурных монолитных интегральных схем СВЧ диапазона и дискретных полупроводниковых приборов.

© М.В. Черкашин, Л.И. Бабак, 2010

© Томск.гос.ун-т сист.упр-я и радиоэл-ки, 2010

## СОДЕРЖАНИЕ

1. Общие определения .....	3
2. Классические матрицы многополюсников.....	6
3. Связь между различными системами параметров.....	19
4. Применение классических матриц многополюсников.....	21
5. Волновая система параметров.....	23
6. Коэффициент отражения .....	26
7. Матрица рассеяния волн мощности.....	27
8. Связь матрицы параметров рассеяния с классическими матрицами.....	32
9. Обобщенные параметры рассеяния.....	34
10. Свойства матрицы рассеяния для различных классов СВЧ цепей.....	39
11. Матрицы рассеяния простейших четырехполюсников и их соединений .	47
12. Анализ СВЧ цепей с применением общей теории многополюсников.....	49

## 1. СВЧ многополюсники

### 1.1 Общие определения

Элементы СВЧ устройств часто удобно представлять в виде многополюсников. Многополюсник – это описание цепи в виде «черного ящика», причем внутреннее содержание его не конкретизируется. У многополюсника доступны лишь внешние зажимы. Мы описываем свойства многополюсника, исходя из его реакции на внешние (тестовые) возбуждающие сигналы.

В виде многополюсников могут быть представлены как отдельные элементы СВЧ устройств (например, отрезок линии передачи, транзистор, и др.), так и некоторые соединения элементов. При моделировании сложных СВЧ устройств они часто разбиваются на части, каждая из которых описывается как отдельный многополюсник, и в результате, устройство в целом представляется как соединение многополюсников.

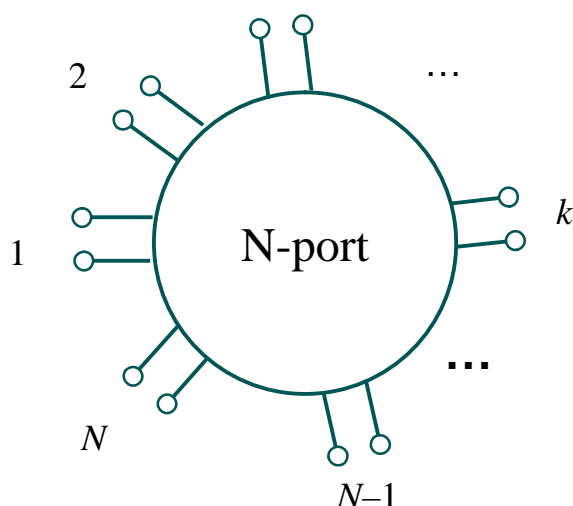
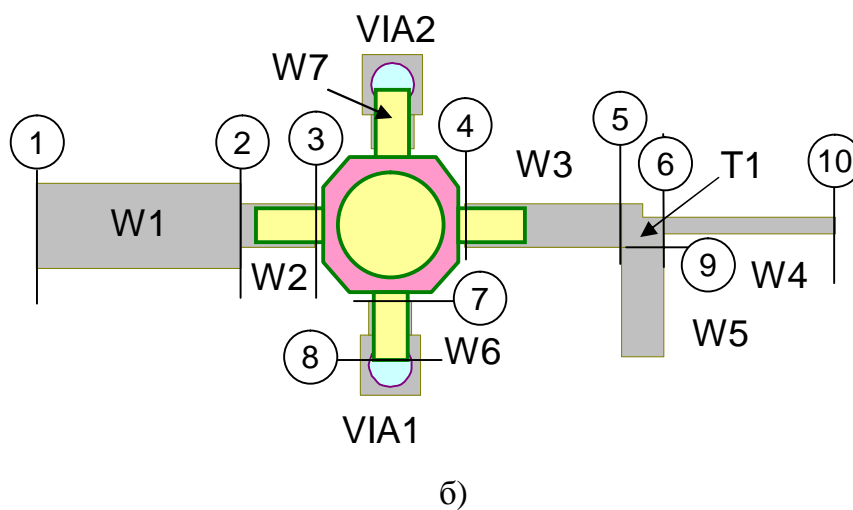
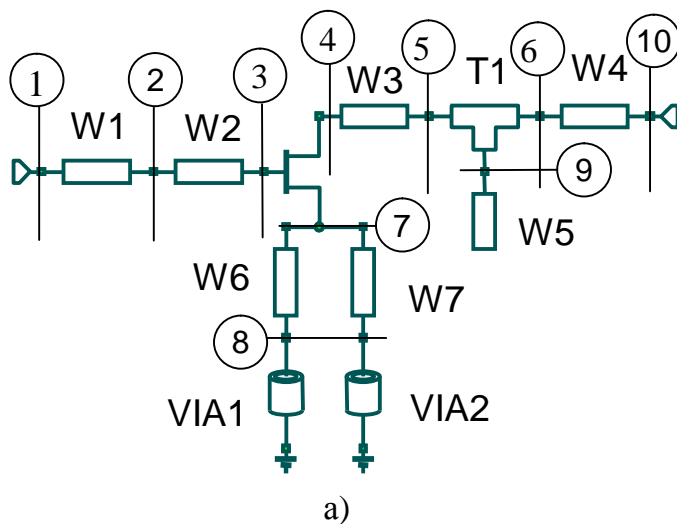


Рисунок 1 – N-полюсник

Понятие многополюсника обычно используется в низкочастотных устройствах. На СВЧ особенность состоит в том, что нет четкой границы между элементами устройства. Например, отдельные элементы могут соединяться между собой отрезками линий передачи. При этом, при разбиении устройства на многополюсники, границу между элементами (электромагнитными полями) зачастую определяет сам разработчик, исходя из условия более точного анализа характеристик устройства.

Входы многополюсников образуются сечениями линий передачи (ЛП). Эти сечения также называют плоскостями отсчета. Обычно сечения между многополюсниками проводят таким образом, чтобы в плоскостях отсчета электромагнитное поле было однородным, т.е. не возникали волны высших типов. Рассмотрим СВЧ усилитель (рис. 2).



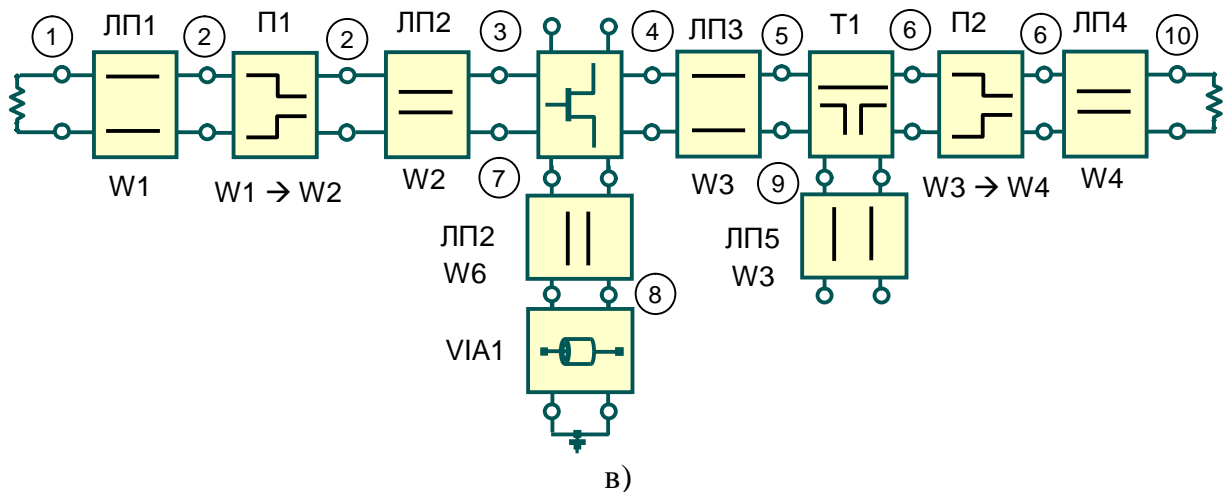


Рисунок 2 – СВЧ усилитель: схема (а), топология (б) и его представление в виде соединения многополюсников (в)

Очевидно, что в месте соединения двух линий передачи (например, ЛП W1 и W2 на рис. 2, а и б) будет возникать неоднородность (скачок волнового сопротивления), которая вызывает появление в ЛП волн высших типов. Если сделать сечение (соединение двух четырехполюсников) в этом месте, то неоднородность при анализе не будет учитываться. Лучше выделить специальный многополюсник – переход ЛП с одного волнового сопротивления на другое (четыреполюсник П1 на рис. 2,в), который моделирует эту неоднородность. Таким образом, все неоднородности окажутся внутри этого четырехполюсника. В месте соединения четырехполюсников электромагнитное поле будет однородным. Транзистор при этом необходимо характеризовать с учетом выводов заданной длины.

Доступные выводы многополюсника называют *зажимами* или *полюсами*. Еще одной особенностью на СВЧ является то, что зажимы (полюсы) многополюсника, как правило, объединяются в пары; пара полюсов образует один вход многополюсника.

В зависимости от способа образования входов многополюсники различают (см. рис. 3):

- 1)  $2n$ -полюсники ( $n$ -port);
- 2)  $n$ -полюсники ( $n$ -terminal network).

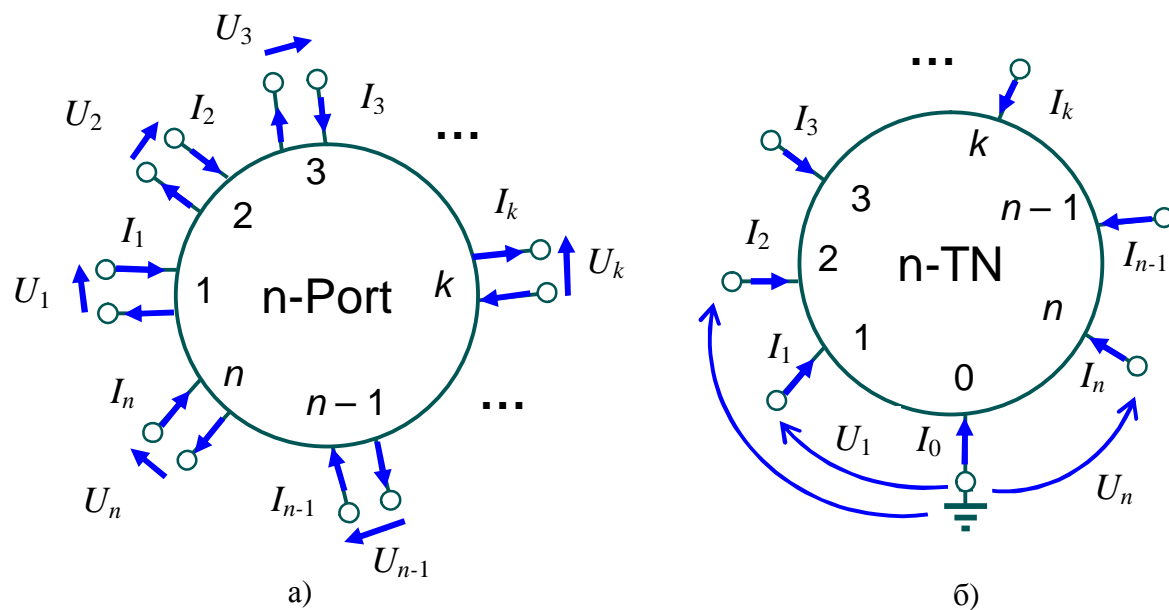


Рисунок 3 – Многополюсник в виде:  $2n$ -полюсника (а) и  $(n+1)$ -полюсника (б)

На СВЧ чаще используется представление элементов в виде  $2n$ -полюсников (пары полюсов образуют входы). Один и тот же элемент иногда может быть представлен как в виде  $2n$ -полюсника, так и в виде  $(n+1)$ -полюсника (рис. 4)

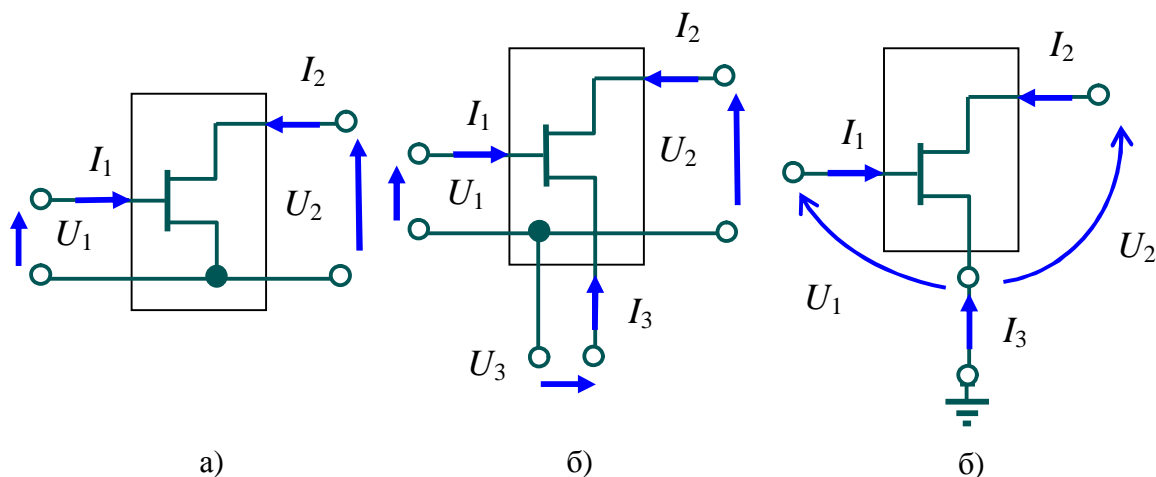


Рисунок 4 – Представление транзистора в виде: а) четырехполюсника (2-port), б) шестиполюсника (3-port) и в) «плавающего» трехполюсника (3-terminal network)

В качестве внешних сигналов (возбуждений) многополюсника можно рассматривать напряжения и токи на его зажимах. Однако на СВЧ, в отличие от НЧ цепей, это будут эквивалентные напряжения и токи.

## 1.2 Классические матрицы многополюсников

На СВЧ чаще всего используются следующие классические матрицы многополюсников –  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{A}$ . Они связывают между собой напряжения и токи на зажимах многополюсника.

### Матрица полных сопротивлений (холостого хода).

Рассмотрим  $2n$ -полюсник (для случая  $(n+1)$ -полюсника – все рассуждения будут аналогичными). Система уравнений, связывающая токи и напряжения на его полюсах будет иметь следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 + \dots + Z_{1n}I_n \\ U_2 &= Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 + \dots + Z_{2n}I_n \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ U_n &= Z_{n1}I_1 + Z_{n2}I_2 + \dots + Z_{nn}I_n \end{aligned} \right\}$$

или в матричной форме записи:

$$[\mathbf{U}] = [\mathbf{Z}] \cdot [\mathbf{I}].$$

Здесь в качестве независимых величин выступают токи  $I_i$  ( $i = 1, n$ ), а зависимыми – напряжения  $U_i$  ( $i = 1, n$ ) на зажимах многополюсника. Элементы матрицы полных сопротивлений  $\mathbf{Z}$  ( $Z_{ij}$ ) представляют собой комплексные числа, имеющие размерность сопротивления (Ом). Часто параметры  $Z_{ij}$  называют *параметрами холостого хода*, так как они измеряются при условии разрыва (холостого хода) соответствующих полюсов многополюсника.

Наиболее часто используемым на практике случаем является четырехполюсник (рис. 5).

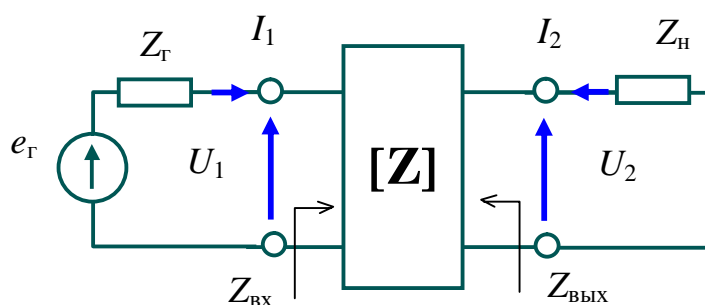


Рисунок 5 – Четырехполюсник в системе Z-параметров

В этом случае система уравнений примет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ U_2 &= Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{aligned} \right\}; \quad \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}.$$



Рассмотрим физический смысл элементов матрицы  $\mathbf{Z}$ :

$Z_{11} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{I_2=0}$  – входное сопротивление четырехполюсника при разомкнутых

зажимах на выходе ( $Z_H = \infty$ );

$Z_{22} = \left. \frac{U_2}{I_2} \right|_{I_1=0}$  – выходное сопротивление четырехполюсника при разомкнутых

зажимах на входе ( $Z_T = \infty$ );

$Z_{21} = \left. \frac{U_2}{I_1} \right|_{I_2=0}$  – сопротивление прямой передачи четырехполюсника при

разомкнутых зажимах на выходе ( $Z_H = \infty$ );

$Z_{12} = \left. \frac{U_1}{I_2} \right|_{I_1=0}$  – сопротивление обратной передачи четырехполюсника при

разомкнутых зажимах на входе ( $Z_T = \infty$ ).

Если рассматривать случай  $n$ -полюсника, то смысл элементов  $Z_{ij}$  будет аналогичным.

### **Основные характеристики четырехполюсника в системе Z-параметров**

Рассмотрим четырехполюсник, включенный между произвольным комплексными сопротивлениями генератора и нагрузки (см. рис. 5). По известным Z-параметрам можно рассчитать основные характеристики четырехполюсника – входное и выходное сопротивления, коэффициент передачи.

Рассмотрим систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ U_2 &= Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \\ U_2 &= -Z_H I_1 \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

Из системы (1.1) можно записать  $Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 + Z_H I_2 = 0$ , отсюда получим, что  $I_2 = \frac{-Z_{21}I_1}{Z_{22} + Z_H}$ . Подставив выражение для тока  $I_2$  в первое уравнение системы

(1.1), получим  $U_1 = Z_{11}I_1 - \frac{Z_{12}Z_{21}I_1}{Z_{22} + Z_H} = \left( Z_{11} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{22} + Z_H} \right) I_1$ . Из этого выражения

легко получить значение *входного сопротивления* нагруженного четырехполюсника:

$$Z_{\text{вх}} = \frac{U_1}{I_1} = Z_{11} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{22} + Z_{\text{H}}} = \frac{Z_{11}Z_{22} + Z_{11}Z_{\text{H}} + Z_{12}Z_{21}}{Z_{22} + Z_{\text{H}}} = \frac{\Delta_Z + Z_{11}Z_{\text{H}}}{Z_{22} + Z_{\text{H}}}.$$

Аналогично можно получить выражение для *выходного сопротивления* четырехполюсника, принимая во внимание, что  $U_1 = -Z_{\Gamma} I_1$  ( $e_{\Gamma} = 0$ ):

$$Z_{\text{вых}} = \frac{U_2}{I_2} = Z_{22} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{11} + Z_{\Gamma}} = \frac{\Delta_Z + Z_{22}Z_{\Gamma}}{Z_{11} + Z_{\Gamma}}.$$

Получим выражение для *коэффициента передачи по напряжению*  $K_U = U_2 / U_1$ . Используя систему уравнений (1.1) можно записать:

$$I_2 = \frac{-U_2}{Z_{\text{H}}}; U_1 = Z_{11}I_1 - \frac{Z_{12}}{Z_{\text{H}}}U_2; I_1 = \frac{1}{Z_{11}} \left( U_1 + \frac{Z_{12}}{Z_{\text{H}}}U_2 \right) = \frac{1}{Z_{11}}U_1 + \frac{Z_{12}}{Z_{11}Z_{\text{H}}}U_2.$$

$$\text{Для напряжения на выходе } U_2 = \frac{Z_{21}}{Z_{11}}U_1 + \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{11}Z_{\text{H}}}U_2 - \frac{Z_{22}}{Z_{11}}U_2; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Z_{11}Z_{\text{H}}U_2 = Z_{21}Z_{\text{H}}U_1 + Z_{12}Z_{21}U_2 - Z_{11}Z_{22}U_2;$$

$$\Rightarrow U_2(Z_{11}Z_{\text{H}} + \Delta_Z) = Z_{21}Z_{\text{H}}U_1.$$

Таким образом, выражение для коэффициента передачи по напряжению примет следующий вид:  $K_U = \frac{U_2}{U_1} = \frac{Z_{21}Z_{\text{H}}}{\Delta_Z + Z_{11}Z_{\text{H}}}$ . Отметим, что это выражение не учитывает сопротивление генератора.

*Коэффициент передачи относительно Э.Д.С. источника сигнала* учитывает величину сопротивления генератора:  $K_E = U_2 / E_{\Gamma}$ .

В результате имеем:  $U_1 = \frac{E_{\Gamma} \cdot Z_{\text{вх}}}{Z_{\Gamma} + Z_{\text{вх}}}$ ;  $K_E = \frac{U_2}{E_{\Gamma}} = \frac{U_2}{U_1} \cdot \frac{U_1}{E_{\Gamma}} = K_U \cdot \frac{Z_{\text{вх}}}{Z_{\Gamma} + Z_{\text{вх}}}$ . Таким

образом выражение для  $K_E$  примет следующий вид:

$$K_E = \frac{Z_{21}Z_{\text{H}}}{Z_{11}Z_{\text{H}} + Z_{22}Z_{\Gamma} + Z_{\Gamma}Z_{\text{H}} + \Delta_Z} = \frac{Z_{21}Z_{\text{H}}}{(Z_{11} + Z_{\Gamma})(Z_{22} + Z_{\text{H}}) - Z_{12}Z_{21}}.$$

Z-параметры удобно использовать для расчета параметров последовательного соединения двух четырехполюсников (рис. 6).

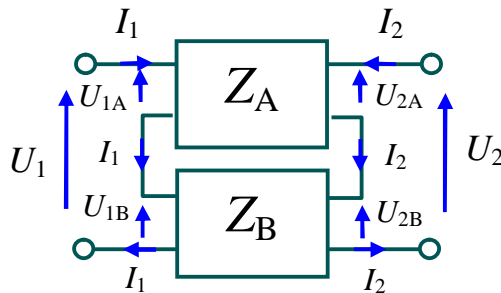


Рисунок 6 – Последовательное соединение двух четырехполюсников

Суммарная матрица полных сопротивлений для соединения двух четырехполюсников на рис. 6 будет иметь вид:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{1A} + U_{2A} \\ U_{1B} + U_{2B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11A} + Z_{11B} & Z_{12A} + Z_{12B} \\ Z_{21A} + Z_{21B} & Z_{22A} + Z_{22B} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix};$$

или в матричной форме

$$[\mathbf{Z}] = [\mathbf{Z}_A] + [\mathbf{Z}_B].$$

Для нас в дальнейшем также представляет интерес матрица полных сопротивлений для последовательно (рис. 7, а) и параллельно (рис. 7, б) включенных двухполюсников с сопротивлением  $Z$ .

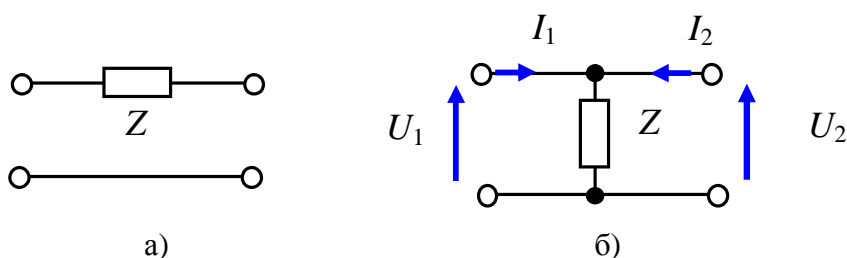


Рисунок 7 – Последовательное (а) и параллельное (б) включение двухполюсного элемента с сопротивлением  $Z$

Для случая на рис. 7, а матрица  $Z$  не существует. Для случая на рис. 7, б можно

записать 
$$\left. \begin{aligned} U_1 &= Z(I_1 + I_2) = ZI_1 + ZI_2 \\ U_2 &= Z(I_1 + I_2) = ZI_1 + ZI_2 \end{aligned} \right\}, \text{ т.е. } [\mathbf{Z}] = \begin{bmatrix} Z & Z \\ Z & Z \end{bmatrix}.$$

*Пример:* рассмотрим усилитель с последовательной цепью обратной связи (см. рис.8).

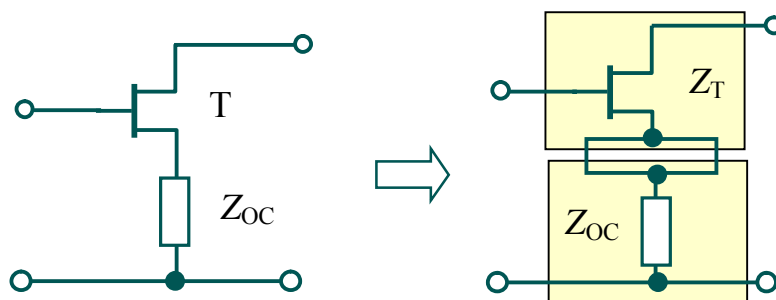


Рисунок 8 – Усилитель с цепью последовательной ОС

Результирующая матрица полных сопротивлений схемы на рис. 8 будет

иметь вид: 
$$[\mathbf{Z}] = [\mathbf{Z}_T] + [\mathbf{Z}_{OC}] = \begin{bmatrix} Z_{11T} + Z_{OC} & Z_{12T} + Z_{OC} \\ Z_{21T} + Z_{OC} & Z_{22T} + Z_{OC} \end{bmatrix}.$$



$Y_{21} = \left. \frac{I_2}{U_1} \right|_{U_2=0}$  – проводимость прямой передачи четырехполюсника при замкнутых зажимах на выходе ( $Z_H = 0$  или  $Y_H = \infty$ );

$Y_{12} = \left. \frac{I_1}{U_2} \right|_{U_1=0}$  – проводимость обратной передачи четырехполюсника при замкнутых зажимах на входе ( $Z_r = 0$  или  $Y_r = \infty$ ).

Если рассматривать случай  $n$ -полюсника, смысл элементов  $Y_{ij}$  будет аналогичным.

Следует отметить, что для одного и того же четырехполюсника  $Z_{11} \neq 1/Y_{11}$ , так как они измеряются в разных режимах. Связь между матрицами полных сопротивлений и проводимостей определяется формулой  $[Y] = [Z]^{-1}$ .

### Основные характеристики четырехполюсника в системе Y-параметров

Рассмотрим четырехполюсник, включенный между произвольным комплексными сопротивлениями генератора и нагрузки (см. рис. 9). По известным Y-параметрам также можно рассчитать основные характеристики четырехполюсника – входную, выходную проводимости и коэффициент передачи.

Проведя анализ, аналогичный тому, что мы сделали для матрицы полных сопротивлений можно записать выражения для *входной проводимости* нагруженного четырехполюсника:

$$Y_{\text{вх}} = \frac{I_1}{U_1} = Y_{11} - \frac{Y_{12}Y_{21}}{Y_{22} + Y_H} = \frac{\Delta_Y + Y_{11}Y_H}{Y_{22} + Y_H},$$

здесь  $\Delta_Y = Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}$ .

Аналогично для *выходной проводимости* четырехполюсника:

$$Y_{\text{вых}} = \frac{I_2}{U_2} = Y_{22} - \frac{Y_{12}Y_{21}}{Y_{11} + Y_r} = \frac{\Delta_Y + Y_{22}Y_r}{Y_{11} + Y_r}.$$

Выражение для *коэффициента передачи по напряжению*  $K_U$  примет следующий вид:

$$K_U = \frac{U_2}{U_1} = \frac{-Y_{21}}{Y_{22} + Y_H}.$$

Выражение для  $K_E$  можно записать как:

$$K_E = \frac{U_2}{E_r} = \frac{Y_{21}Y_r}{(Y_{11} + Y_r)(Y_{22} + Y_H) - Y_{12}Y_{21}}.$$

Y-параметры удобно использовать для расчета параметров параллельного соединения двух четырехполюсников (рис. 10).

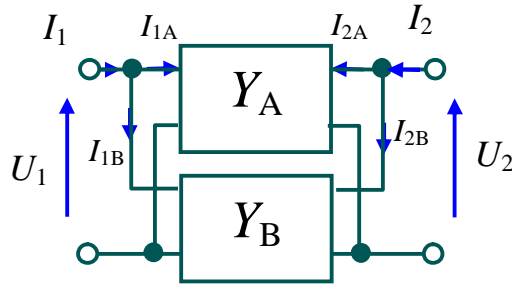


Рисунок 10 – Параллельное соединение двух четырехполюсников

Суммарная Y-матрица для соединения двух четырехполюсников на рис. 10 будет иметь вид:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{1A} + I_{2A} \\ I_{1B} + I_{2B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11A} + Y_{11B} & Y_{12A} + Y_{12B} \\ Y_{21A} + Y_{21B} & Y_{22A} + Y_{22B} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix};$$

или в матричной форме

$$[\mathbf{Y}] = [\mathbf{Y}_A] + [\mathbf{Y}_B].$$

Для нас в дальнейшем также представляет интерес Y-матрица для последовательно (рис. 11, а) и параллельно (рис. 11, б) включенных двухполюсников с проводимостью Y.

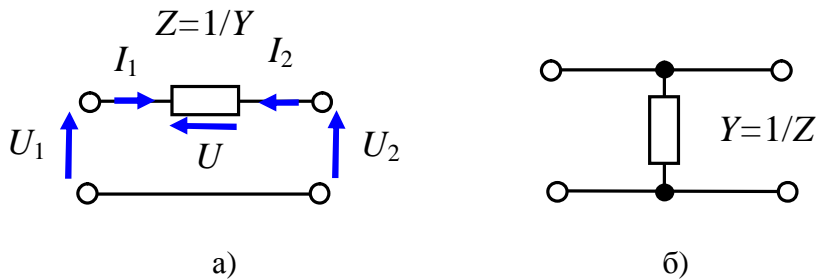


Рисунок 11 – Последовательное (а) и параллельное (б) включение двухполюсного элемента с проводимостью Y

Для случая на рис. 11, б матрица [Y] не существует. Для случая на рис. 11, а можно записать

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \frac{U}{Z} = (U_1 - U_2)Y = YU_1 - YU_2 \\ I_2 &= -\frac{U}{Z} = -(U_1 - U_2)Y = -YU_1 + YU_2 \end{aligned} \right\}, \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y & -Y \\ -Y & Y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}, \text{ т.е.}$$

$$[\mathbf{Y}] = \begin{bmatrix} Y & -Y \\ -Y & Y \end{bmatrix}.$$

*Пример:* рассмотрим усилительный каскад с цепью параллельной обратной связи (см. рис.12).

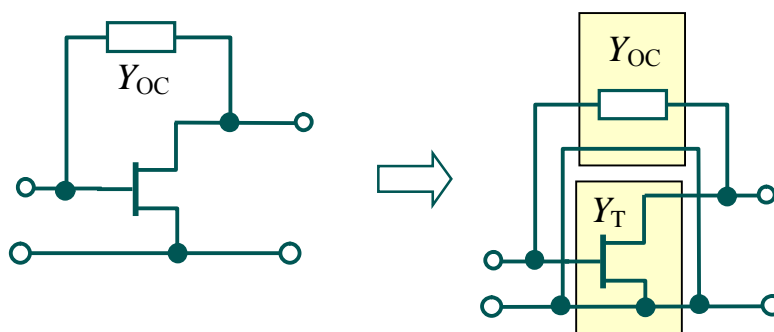


Рисунок 12 – Усилитель с цепью параллельной ОС

Результирующая матрица полных проводимостей схемы на рис. 12 будет иметь вид:  $[Y] = [Y_T] + [Y_{OC}] = \begin{bmatrix} Y_{11T} + Y_{OC} & Y_{12T} - Y_{OC} \\ Y_{21T} - Y_{OC} & Y_{22T} + Y_{OC} \end{bmatrix}$ .

### Матрица гибридных параметров (H-параметров)

Режимы холостого хода (ХХ) и короткого замыкания (КЗ) трудно реализовать на ВЧ, что связано с наличием паразитных емкостей и индуктивностей при соединениях многополюсных элементов. Режим КЗ легче реализовать в схемах с большим входным (выходным) сопротивлением ( $Z_T \ll Z_{вх}$ ,  $Z_H \ll Z_{вых}$ ). Режим ХХ – в схемах с малыми  $Z_{вх}$  и  $Z_{вых}$  ( $Z_T \gg Z_{вх}$ ,  $Z_H \gg Z_{вых}$ ). Биполярные транзисторы обычно имеют малое входное сопротивление (близкое к 50 Ом) и большое выходной сопротивление. Поэтому в период развития полупроводниковой электроники на биполярных транзисторах (с середины 50-х г.г.) большую популярность получили гибридные параметры (h-параметры). Они измеряются в режиме ХХ на входе и КЗ на выходе четырехполюсника. При этом принималось во внимание то, что для биполярных транзисторов: а) проще реализовать их измерения; б) они описывают характеристики транзистора в условиях, близких к рабочим режимам.

Для четырехполюсника (рис. 13) система уравнений для h-параметров имеет следующий вид:

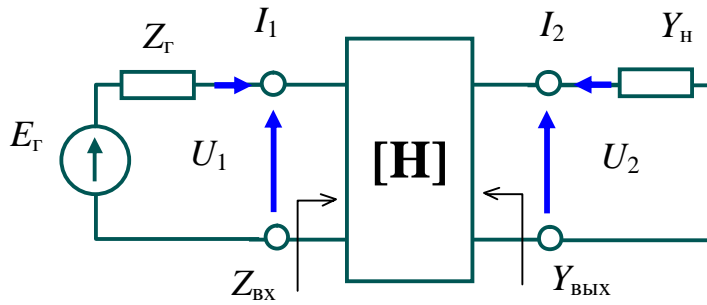


Рисунок 13 – Четырехполюсник в системе h-параметров

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= H_{11}I_1 + H_{12}U_2 \\ I_2 &= H_{21}I_1 + H_{22}U_2 \end{aligned} \right\}; \begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix}.$$

Независимыми переменными здесь являются  $U_2$  и  $I_1$ , зависимыми –  $U_1$  и  $I_2$ .

Рассмотрим физический смысл гибридных h-параметров:

$H_{11} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{U_2=0}$  – входное сопротивление четырехполюсника при замкнутых

зажимах (КЗ) на выходе ( $H_{11} = 1/Y_{11}$ );

$H_{22} = \left. \frac{I_2}{U_2} \right|_{I_1=0}$  – выходная проводимость четырехполюсника при разомкнутых

(ХХ) зажимах на входе ( $H_{22} = 1/Z_{22}$ );

$H_{21} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{U_2=0}$  – коэффициент передачи по току четырехполюсника в прямом

направлении при замкнутых зажимах (КЗ) на выходе;

$H_{12} = \left. \frac{U_1}{U_2} \right|_{I_1=0}$  – обратный коэффициент передачи по напряжению

четырехполюсника при разомкнутых зажимах (ХХ) на входе.

Элемент h-матрицы  $H_{11}$  имеет размерность сопротивления (Ом),  $H_{22}$  – проводимости (См), а  $H_{12}$  и  $H_{21}$  – безразмерные величины. Применительно к биполярному транзистору эти коэффициенты имеют специальное обозначение  $H_{21(ОЭ)} \equiv \beta$ ,  $H_{21(ОБ)} = \alpha$ , и их значения, измеренные на фиксированных частотах, приводятся в справочниках. При этом они имеют физический смысл коэффициента усиления по току при условии КЗ на выходе транзистора.

Характеристики четырехполюсника, описываемого h-параметрами.

Входное сопротивление четырехполюсника (см. рис. 13):

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\Delta_H + H_{11}Y_n}{H_{22} + Y_n}.$$



$$\text{Выходное сопротивление: } Z_{\text{вых}} = \frac{H_{11} + Z_{\Gamma}}{\Delta_H + H_{22}Z_{\Gamma}}.$$

$$\text{Коэффициент усиления по напряжению: } K_U = \frac{U_2}{U_1} = \frac{-H_{21}}{\Delta_H + H_{11}Y_H}.$$

Также можно выделить соединение двух четырехполюсников, для которых суммарная  $H$ -матрица будет равна сумме исходных – это так называемое последовательно-параллельное соединение (рис. 14).

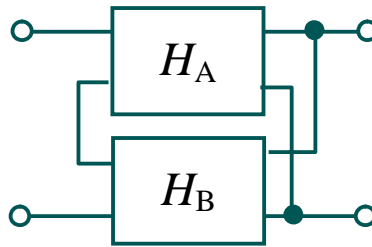


Рисунок 14 – Последовательно-параллельное соединение двух четырехполюсников

Для цепи на рис. 14 суммарная матрица гибридных параметров будет равна  $[H] = [H_A] + [H_B]$ .

### Матрица передачи (A-параметры или ABCD-параметры)

Рассмотрим систему уравнений, которые описываются матрицей передачи (или A-параметров). В иностранной литературе эти параметры носят название ABCD-параметров. Эти параметры связывают между собой выходные напряжение  $U_2$  и ток  $I_2$  с напряжением  $U_1$  и током  $I_1$  на входе четырехполюсника:

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= A_{11}U_2 + A_{12}(-I_2) \\ I_1 &= A_{21}U_2 + A_{22}(-I_2) \end{aligned} \right\}; \begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}.$$

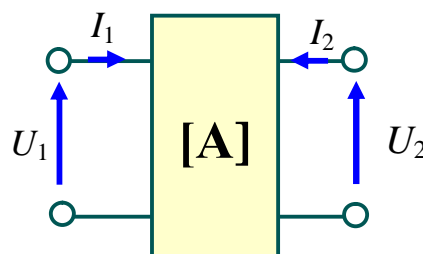


Рисунок 15 – Четырехполюсник, описываемый системой A-параметров

Независимыми переменными здесь являются  $U_2$  и  $I_2$ , зависимыми –  $U_1$  и  $I_1$ .

Рассмотрим физический смысл A-параметров:

$A_{11} = \left. \frac{U_1}{U_1} \right|_{I_2=0}$  – обратный коэффициент передачи по напряжению при условии ХХ

на выходе;

$A_{22} = \left. \frac{I_1}{-I_2} \right|_{U_2=0}$  – обратный коэффициент передачи по току при условии КЗ на

выходе четырехполюсника;

$A_{12} = \left. \frac{U_1}{-I_2} \right|_{U_2=0}$  – обратное передаточное сопротивление при КЗ на выходе

( $A_{12} = -1/Y_{21}$ );

$A_{21} = \left. \frac{I_1}{U_2} \right|_{I_2=0}$  – обратная передаточная проводимость при ХХ на выходе

( $A_{21} = 1/Z_{21}$ ).

Характеристики четырехполюсника описываются следующими выражениями:

$$\text{входное сопротивление: } Z_{\text{вх}} = \frac{A_{11}Z_{\text{н}} + A_{12}}{A_{21}Z_{\text{н}} + A_{22}};$$

$$\text{выходное сопротивление: } Z_{\text{вых}} = \frac{A_{22}Z_{\Gamma} + A_{12}}{A_{21}Z_{\Gamma} + A_{11}};$$

$$\text{коэффициент передачи по напряжению: } K_U = \frac{U_2}{U_1} = \frac{Z_{\text{н}}}{A_{11}Z_{\text{н}} + A_{12}};$$

коэффициент передачи относительно источника Э.Д.С.:

$$K_E = \frac{U_2}{E_{\Gamma}} = \frac{Z_{\text{н}}}{A_{11}Z_{\text{н}} + A_{12} + A_{22}Z_{\Gamma} + A_{21}Z_{\Gamma}Z_{\text{н}}}.$$

Для каскадного соединения четырехполюсников (см. рис. 16) суммарная матрица передачи будет равна произведению А-матриц составляющих четырехполюсников:  $[\mathbf{A}] = \Pi [\mathbf{A}_k]$ , т.е. для цепи на рис. 16 результирующая А-матрица будет иметь вид  $[\mathbf{A}] = [\mathbf{A}_1] \cdot [\mathbf{A}_2]$ .

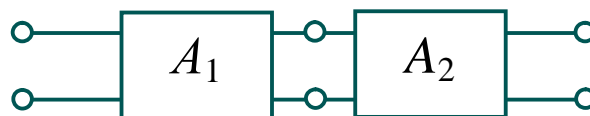


Рисунок 16 – Каскадное соединения двух четырехполюсников

Рассмотрим, что из собой представляют А-матрицы простейших четырехполюсных элементов (рис. 17).

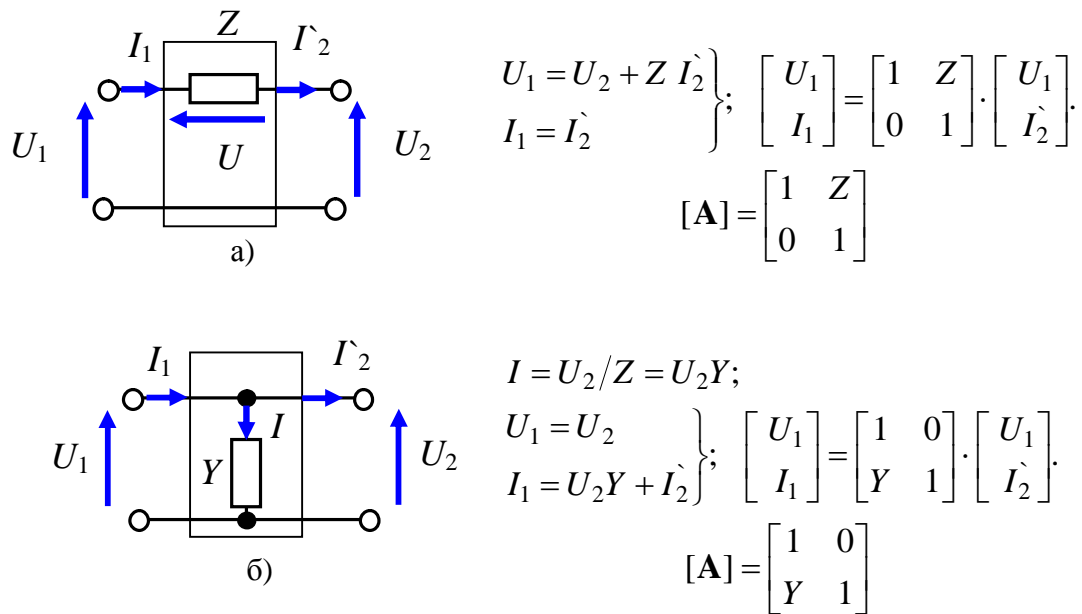


Рисунок 17 – Последовательное (а) и параллельное (б) включение двухполюсного элемента с сопротивлением  $Z$

Используя выражение для каскадного соединения четырехполюсников, легко можно получить результирующую  $A$ -матрицу для более сложных цепей,

например, для  $\Gamma$ -образной цепи (рис. 18):  $[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y_1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & Z_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z_2 \\ Y_1 & 1 + Y_1 Z_2 \end{bmatrix}$ .

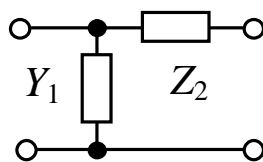


Рисунок 18 –  $\Gamma$ -образное соединения двух двухполюсников

Таким образом, могут быть получены матрицы передачи лестничных цепей, состоящих из сосредоточенных  $R$ ,  $L$  и  $C$  элементов.

Рассмотрим матрицы передачи для четырехполюсников, состоящих из распределенных элементов.

Для отрезка ЛПП длиной  $l$  (рис. 19),  $A$ -матрица будет иметь следующий вид []:

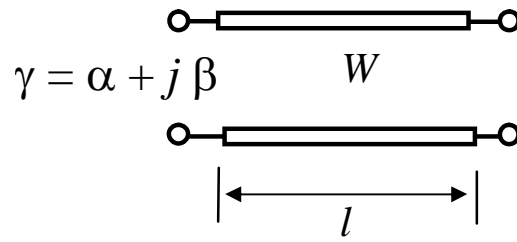


Рисунок 19 – Отрезок ЛП длиной  $l$  с волновым сопротивлением  $W$

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= U_2 \operatorname{ch} \gamma l + I_2 W \operatorname{sh} \gamma l \\ I_1 &= \frac{U_2}{W} \operatorname{sh} \gamma l + I_2 \operatorname{ch} \gamma l \end{aligned} \right\}; \Rightarrow [\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} \operatorname{ch} \gamma l & W \operatorname{sh} \gamma l \\ \frac{\operatorname{sh} \gamma l}{W} & \operatorname{ch} \gamma l \end{bmatrix}.$$

Для ЛП без потерь ( $\alpha = 0$ ) и учитывая, что  $\Theta = \beta l = 2\pi \frac{l}{\lambda}$ :

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= U_2 \cos \Theta + j I_2 W \sin \Theta \\ I_1 &= j \frac{U_2}{W} \sin \Theta + I_2 \cos \Theta \end{aligned} \right\}; \Rightarrow [\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} \cos \Theta & jW \sin \Theta \\ j \frac{\sin \Theta}{W} & \cos \Theta \end{bmatrix}.$$

Аналогично можно определить А-матрицы следующих элементов:

для разомкнутого (ХХ) отрезка ЛП (рис. 19,а), параллельно включенного в ЛП:

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{Z_{\text{BX}}} & 1 \end{bmatrix}, \text{ где } Z_{\text{BX}} = \frac{W}{\operatorname{th} \gamma l}, (\alpha \neq 0) \text{ или } Z_{\text{BX}} = \frac{-jW}{\operatorname{tg} \Theta}, (\alpha = 0);$$

для замкнутого (КЗ) отрезка ЛП (рис. 19,б), параллельно включенного в ЛП:

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{Z_{\text{BX}}} & 1 \end{bmatrix}, \text{ где } Z_{\text{BX}} = W \operatorname{th} \gamma l, (\alpha \neq 0) \text{ или } Z_{\text{BX}} = jW \operatorname{tg} \Theta, (\alpha = 0).$$

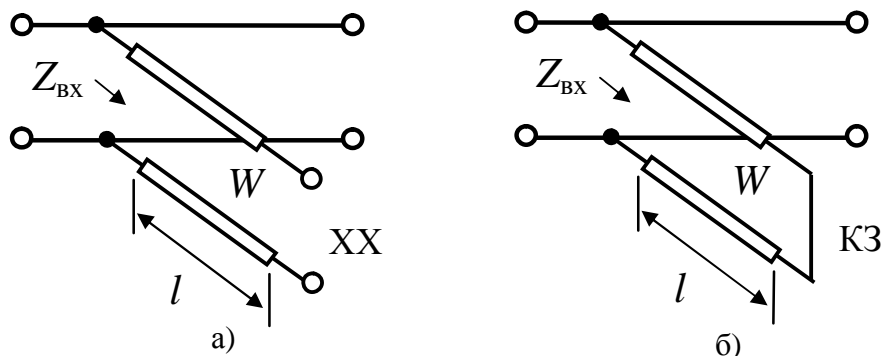


Рисунок 20 – ХХ (а) и КЗ (б) шлейфы, параллельно включенные в ЛП

Также существует еще два вида классических систем параметров для четырехполюсника – это системы  $[\mathbf{G}]$  и  $[\mathbf{F}]$  параметров, но они менее распространены, чем рассмотренные нами ранее.

### 1.3 Связь между различными системами параметров

Классические матрицы многополюсников устанавливают связь между напряжениями и токами на его зажимах (входах). Уравнения многополюсника (четырёхполюсника) в различных системах параметров отличаются лишь выбором независимых и зависимых величин (напряжений и токов). Можно сказать, что это различные формы представления одних и тех же зависимостей между напряжениями и токами на зажимах многополюсника. Эти формы эквивалентны между собой, и от одной из них можно перейти к другой. Таким образом, зная (измерив или рассчитав) параметры одной из матриц, всегда можно пересчитать другие параметры.

Для примера установим связь между  $Z$ - и  $Y$ -параметрами.

Имеем  $[U] = [Z] \cdot [I]$  и  $[I] = [Y] \cdot [U]$ . Чтобы выразить вектор токов  $[I]$  через вектор напряжений  $[U]$ , умножим обе части уравнения на  $[Z]^{-1}$  (слева):

$$[Z]^{-1}[U] = [Z]^{-1}[Z] [I] = [I].$$

Таким образом, получаем что  $[I] = [Z]^{-1}[U]$ , т.е.  $[Y] = [Z]^{-1}$  или обратное равенство также верно:  $[Z] = [Y]^{-1}$ .

Для четырехполюсника получаем:  $[Y] = [Z]^{-1} = \frac{1}{\Delta_Z} \begin{bmatrix} Z_{22} & -Z_{12} \\ -Z_{21} & Z_{11} \end{bmatrix}$ , где

$$\Delta_Z = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21} \text{ или } [Z] = [Y]^{-1} = \frac{1}{\Delta_Y} \begin{bmatrix} Y_{22} & -Y_{12} \\ -Y_{21} & Y_{11} \end{bmatrix}, \Delta_Y = Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}.$$

Аналогично можно установить связь других матриц между собой. Результаты сведены в таблицу 1.1.

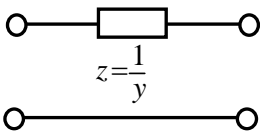
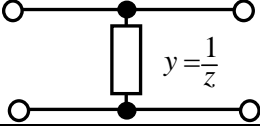
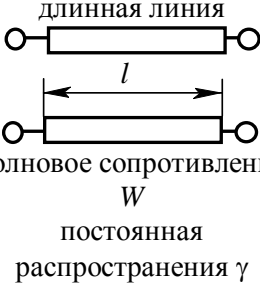
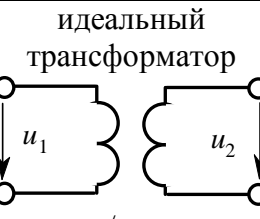
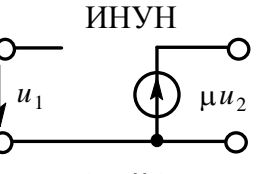
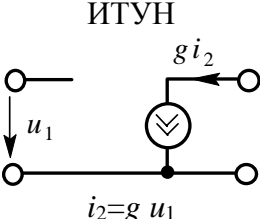
Таблица 1.1 – Связь между элементами матриц классической теории четырехполюсника

	<b>Z</b>	<b>Y</b>	<b>A</b>	<b>H</b>
<b>Z</b>	$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\det \mathbf{Y}} \begin{bmatrix} y_{22} & -y_{12} \\ -y_{21} & y_{11} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{a_{21}} \begin{bmatrix} a_{11} & \det \mathbf{A} \\ 1 & a_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{h_{22}} \begin{bmatrix} \det \mathbf{H} & h_{12} \\ -h_{21} & 1 \end{bmatrix}$
<b>Y</b>	$\frac{1}{\det \mathbf{Z}} \begin{bmatrix} z_{22} & -z_{12} \\ -z_{21} & z_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{a_{12}} \begin{bmatrix} a_{22} & -\det \mathbf{A} \\ -1 & a_{11} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{h_{11}} \begin{bmatrix} 1 & -h_{12} \\ h_{21} & \det \mathbf{H} \end{bmatrix}$
<b>A</b>	$\frac{1}{z_{21}} \begin{bmatrix} z_{11} & \det \mathbf{Z} \\ 1 & z_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{-1}{y_{21}} \begin{bmatrix} y_{22} & 1 \\ \det \mathbf{Y} & y_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{-1}{h_{21}} \begin{bmatrix} \det \mathbf{H} & h_{11} \\ h_{22} & 1 \end{bmatrix}$

<b>H</b>	$\frac{1}{z_{22}} \begin{bmatrix} \det \mathbf{Z} & z_{12} \\ -z_{21} & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{y_{11}} \begin{bmatrix} 1 & -y_{12} \\ y_{21} & \det \mathbf{Y} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{a_{22}} \begin{bmatrix} a_{12} & \det \mathbf{A} \\ -1 & a_{21} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$
----------	------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------

Матрицы параметров наиболее часто применяемых четырехполюсников приведены в таблице 1.2.

Таблица 1.2 – Матрицы часто используемых элементов электрических цепей

Вид четырехполюсника	Элементы матрицы		
	<b>Z</b>	<b>Y</b>	<b>A</b>
 $z = \frac{1}{y}$	не существует	$\begin{bmatrix} y & -y \\ -y & y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
 $y = \frac{1}{z}$	$\begin{bmatrix} z & z \\ z & z \end{bmatrix}$	не существует	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix}$
 длинная линия $l$ волновое сопротивление $W$ постоянная распространения $\gamma$	$\begin{bmatrix} -jW \cdot \text{ctg} \gamma l & \frac{-jW}{\sin \gamma l} \\ \frac{-jW}{\sin \gamma l} & jW \cdot \text{ctg} \gamma l \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{-j \text{ctg} \gamma l}{W} & \frac{j \text{csc} \gamma l}{W} \\ \frac{j \text{csc} \gamma l}{W} & \frac{j \text{ctg} \gamma l}{W} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cos \gamma l & jW \sin \gamma l \\ \frac{j \sin \gamma l}{W} & \cos \gamma l \end{bmatrix}$
 идеальный трансформатор $u_1$ $u_2$ $u_2/u_1 = n$	не существует	не существует	$\begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & 1/n \end{bmatrix}$
 ИНУН $u_1$ $\mu u_2$ $u_2 = \mu u_1$	не существует	не существует	$\begin{bmatrix} 1/\mu & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
 ИТУН $u_1$ $g i_2$ $i_2 = g u_1$	не существует	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -1/g \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

<p style="text-align: center;">ИНУТ</p>  <p style="text-align: center;"><math>u_2 = r i_1</math></p>	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ r & 0 \end{bmatrix}$	не существует	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/r & 0 \end{bmatrix}$
<p style="text-align: center;">ИТУТ</p>  <p style="text-align: center;"><math>i_2 = \beta i_1</math></p>	не существует	не существует	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1/\beta \end{bmatrix}$

### 1.4 Применение классических матриц многополюсников

Классические матрицы (системы параметров) многополюсников используются: 1) для описания отдельных элементов схем; 2) для анализа сложных схем, состоящих из многополюсников.

При этом, в зависимости от типа соединения многополюсников, можно использовать соответствующую систему параметров, а затем вычислить характеристики схемы.

В качестве примера рассмотрим расчет характеристик усилительного каскада, показанного на рис. 20. Эту цепь можно представить в виде: 1) параллельное соединение транзистора ( $Y_T$ ) и двухполюсника  $Y_1$ ; 2) последовательное соединение четырехполюсника  $[Z_{1T}]$ , образованного соединением  $Y_T$  и  $Y_1$ , и двухполюсника  $Z_2$ ; 3) каскадного соединения четырехполюсников  $[A_{1T2}]$  и  $[A_3]$ .

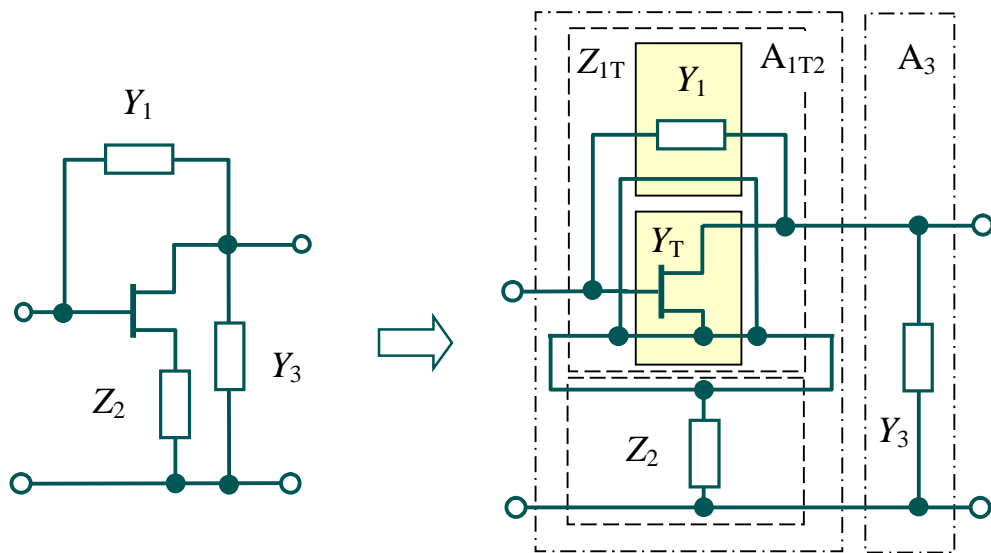


Рисунок 20 – Усилительный каскад с тремя корректирующими двухполюсниками

Таким образом, последовательность анализа будет следующая: 1) рассчитываем  $Y$ -матрицы для транзистора ( $[Y_T]$ ) и двухполюсной цепи параллельной ОС  $Y_1$ ,  $[Y_1] = \begin{bmatrix} Y_1 & -Y_1 \\ -Y_1 & Y_1 \end{bmatrix}$ ; 2) рассчитываем параллельное соединение транзистора и  $[Y_1]$ :  $[Y_{1T}] = [Y_T] + [Y_1]$ ; 3) рассчитываем матрицу  $[Z_{1T}] = [Y_{1T}]^{-1}$ ; 4) рассчитываем  $Z$ -матрицу для последовательного соединения четырехполюсников  $[Z_{1T}]$  и  $[Z_2] \Rightarrow [Z_{1T2}] = [Z_{1T}] + [Z_2]$ ; 5) по таблице 1.2

рассчитываем  $A$ -параметры четырехполюсника  $[Z_{1T2}]$ :  $[A_{1T2}] = \frac{1}{Z_{22}} \begin{bmatrix} \Delta_Z & Z_{12} \\ -Z_{21} & 1 \end{bmatrix}$ ,

где  $\mathbf{Z} = [Z_{1T2}] = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$ ,  $\Delta_Z = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}$ ; 6) по таблице 1.2 рассчитываем

$A$ -параметры четырехполюсника  $[Y_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y_3 & 1 \end{bmatrix}$ ; 7) рассчитываем суммарные  $A$ -

параметры всей схемы по формуле для каскадного соединения четырехполюсников  $[A_{1T2}]$  и  $[A_3] \Rightarrow [A] = [A_{1T2}] \cdot [A_3]$ ; 8) по полученной результирующей  $A$ -матрице рассчитываем характеристики всего каскада, например коэффициент усиления по напряжению будет равен:

$$K_U = \frac{U_2}{U_1} = \frac{Z_H}{A_{11}Z_H + A_{12}}$$

Таким образом, процесс анализа цепи, состоящей из нескольких многополюсных (четырёхполюсных) элементов сводится к использованию



формул преобразования параметров (см. табл. 1.1) и формул для различных способов соединения четырехполюсников между собой.

*Недостатки применения классических матриц на СВЧ:*

1) они связывают величины (напряжения и токи), которые на СВЧ сложно точно определить и непосредственно измерить (в области СВЧ лучше в качестве переменных использовать мощность, которую легко измерить);

2) Для некоторых типов элементов СВЧ цепей классические матрицы не существует;

3) элементы классических матриц сложно измерить на ВЧ и СВЧ, так как сложно реализовать режимы КЗ или ХХ на зажимах многополюсника. Основные причины: во-первых, наличие паразитных параметров (индуктивностей и емкостей) как внутри СВЧ элементов, так и при их соединении; во-вторых, в режимах КЗ или ХХ большинство активных СВЧ элементов (например, СВЧ транзисторы) являются неустойчивыми приборами, т.е. начинают генерировать паразитные сигналы.

Таким образом, измерения параметров классических матриц реально реализуемы до частот не выше 100-200 МГц. В настоящее время для характеристики СВЧ элементов (например параметров транзисторов) чаще всего используют параметры рассеяния (S-параметры – scattering parameters), классические параметры (прежде всего Y- и H-параметры) используются для решения задач анализа СВЧ цепей.

### **1.5 Волновая система параметров**

В отличие от классических матриц, матрицы волновой системы параметров связывают между собой не напряжения и токи, а падающие и отраженные волны напряжения или мощности на зажимах многополюсника. Система S-параметров была введена в 50-е годы и использовалась для теоретического анализа СВЧ устройств, в основном для расчета параметров ЛП. В 1965 г. специалисты фирмы HP разработали прибор для измерения S-параметров (векторный анализатор), работающий до частоты 4 ГГц, а позже – до 12 ГГц. В это же время появились теоретические работы по анализу активных СВЧ устройств на основе S-параметров (Бодвей). Сейчас – это основной аппарат для описания СВЧ элементов и анализа СВЧ устройств.

Для определения S-параметров рассмотрим четырехполюсник, включенный линию передачи (рис. 21).

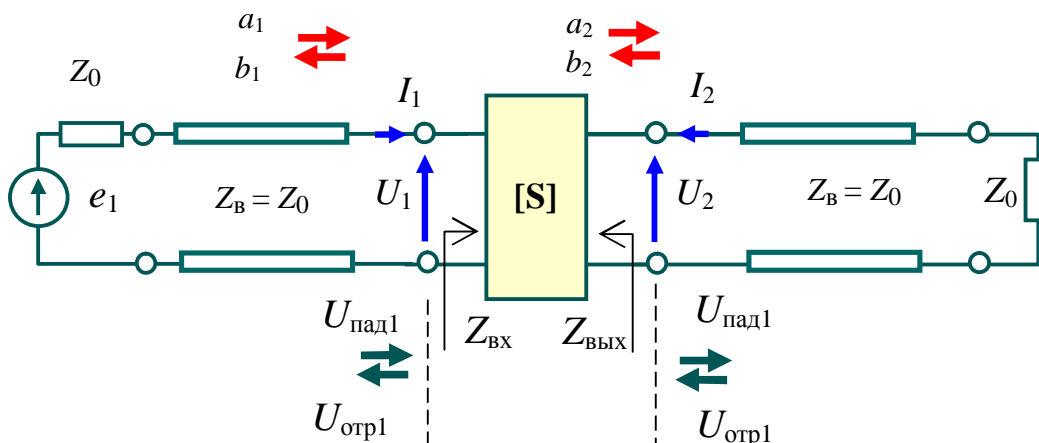


Рисунок 21 – Четырехполюсник, описываемый S-параметрами

При включении четырехполюсника в ЛП и подаче синусоидальных сигналов в ЛП образуются падающие и отраженные волны. Матрица рассеяния связывает значения волн переменных в сечениях входов четырехполюсника.

Существует три разновидности матрицы рассеяния:

- 1) матрица рассеяния волн напряжения (ненормированная S-матрица);
- 2) матрица рассеяния волн мощности (нормированная S-матрица) – это так называемая система стандартных S-параметров;
- 3) обобщенная матрица рассеяния (нормированная относительно комплексных нагрузок) – система обобщенных (универсальных) S-параметров.

### Матрица рассеяния волн напряжения.

Эта матрица связывает между собой падающие и отраженные волны напряжений:

$$\left. \begin{aligned} U_{отр1} &= S_{11}U_{пад1} + S_{12}U_{пад2} \\ U_{отр2} &= S_{21}U_{пад1} + S_{22}U_{пад2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} U_{отр1} \\ U_{отр2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{пад1} \\ U_{пад2} \end{bmatrix}.$$

В настоящее время эта матрица используется редко.

### Матрица рассеяния волн мощности.

На СВЧ удобнее оперировать не токами и напряжениями, которые сложно измерять, а мощностями. До сих пор мы использовали классические понятия тока и напряжения. Аналогичные результаты можно получить, если ввести понятия

волн мощности:  $a = \frac{U_{\text{пад}}}{\sqrt{Z_B}}$ ;  $b = \frac{U_{\text{отр}}}{\sqrt{Z_B}}$  – падающая и отраженная волны мощности, соответственно. Так как  $U_{\text{пад}} = I_{\text{пад}} Z_B$ ;  $U_{\text{отр}} = I_{\text{отр}} Z_B$ , то  $a = I_{\text{пад}} \sqrt{Z_B}$ ;  $b = I_{\text{отр}} \sqrt{Z_B}$ .

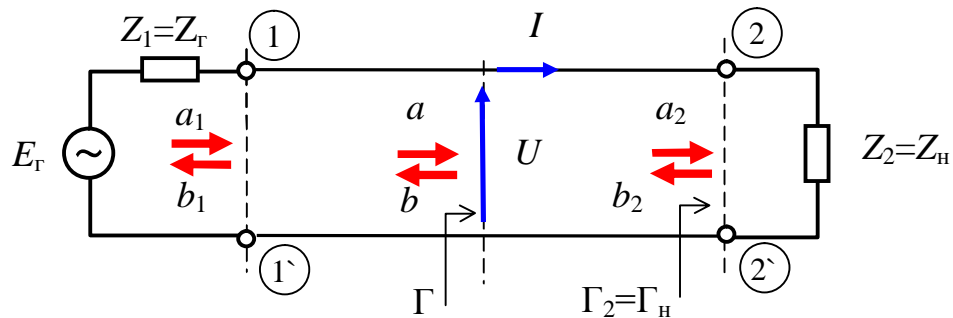


Рисунок 22 – Иллюстрация для расчета волн мощности

Рассмотрим величины  $|a|^2$  и  $|b|^2$ :

$$|a|^2 = \frac{|U_{\text{пад}}|^2}{Z_B} \text{ – мощность падающей волны;}$$

$$|b|^2 = \frac{|U_{\text{отр}}|^2}{Z_B} \text{ – мощность отраженной волны.}$$

Таким образом, физический смысл величин  $|a|^2$  и  $|b|^2$  – мощность, переносимая падающей и отраженной волнами, соответственно. Размерность самих волн  $a$  и  $b$  – корень квадратный из мощности (Ватт<sup>1/2</sup>).

Иногда величины  $\frac{U}{\sqrt{Z_B}}$  и  $I\sqrt{Z_B}$  называют (полными) нормированными напряжениями или токами, например  $\frac{U_{\text{пад}}}{\sqrt{Z_B}}$  – нормированное напряжение падающей волны и т.д. Но это не совсем правильно, так как размерность не Вольт или Ампер, а корень квадратный из мощности (Ватт<sup>1/2</sup>).

Установим связь между волнами мощности, с одной стороны, и напряжением и током в ЛП, с другой стороны. Выражения для напряжения и тока в любом сечении ЛП (рис. 21) можно представить в виде:

$$\left. \begin{aligned} U &= U_{\text{пад}} + U_{\text{отр}} = a\sqrt{Z_B} + b\sqrt{Z_B} \\ I &= I_{\text{пад}} - I_{\text{отр}} = \frac{a}{\sqrt{Z_B}} - \frac{b}{\sqrt{Z_B}} \end{aligned} \right\}$$

Отсюда получаем, что  $a = \frac{U + I Z_B}{2\sqrt{Z_B}}$ ;  $b = \frac{U - I Z_B}{2\sqrt{Z_B}}$ .

Волны мощности можно рассматривать формально как некоторые линейные комбинации токов и напряжений. Но они имеют ясный физический смысл.

## 1.6 Коэффициент отражения

Одним из широко применяемых понятий на СВЧ является *коэффициент отражения*. Коэффициент отражения волн мощности определяется как  $\Gamma = \frac{b}{a}$ , т.е. представляет собой отношение волны мощности отраженной волны к волне мощности падающей волны.

В сечении 2 – 2` (сечении подключения нагрузки):  $\Gamma_2 = \Gamma_H = b_2/a_2$ . Тогда получим, что  $\Gamma_H = \frac{U_2 - I_2 \sqrt{Z_B}}{U_2 + I_2 \sqrt{Z_B}} = \frac{Z_H - Z_B}{Z_H + Z_B}$ .

Рассмотрим, как описать передачу мощности в ДЛ с помощью волн мощности. Попробуем определить смысл мощности падающей волны, т.е. что из себя представляет  $|a_1|^2 = P_{пад1}$ .

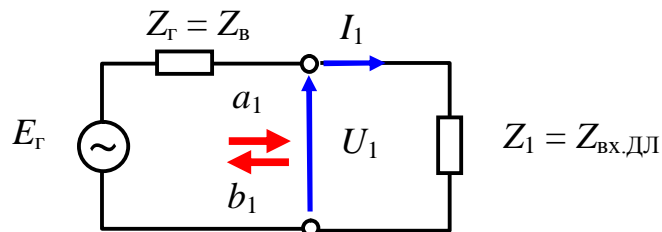


Рисунок 23 – Иллюстрация для определения падающей мощности

Падающая волна равна  $a_1 = \frac{U_1 + I_1 Z_B}{2\sqrt{Z_B}}$ ; из рис. 23 получаем, что

$U_1 = E_G - I_1 Z_B$ , отсюда  $a_1 = \frac{E_G}{2\sqrt{Z_B}}$ . Таким образом, падающая мощность будет

равна  $|a_1|^2 = P_{пад1} = \frac{|E_G|^2}{4Z_B} = P_{Г.ном}$ , т.е.  $|a_1|^2$  – мощность, развиваемая

генератором с сопротивлением  $Z_B$  в согласованной нагрузке  $Z_H = Z_B$  (номинальная мощность генератора).

Ранее смысл мощности отраженной волны мы определили исходя из баланса мощностей. Сейчас попробуем определить мощность отраженной волны  $|b_1|^2 = P_{отр1}$  напрямую из математических соотношений.

Отраженная волна равна  $b_1 = \frac{U_1 - I_1 Z_B}{2\sqrt{Z_B}}$ ; тогда:

$|b_1|^2 = P_{отр1} = \frac{1}{4Z_B} [ |U_1|^2 + |I_1|^2 Z_B^2 - 2\text{Re}U_1 I_1^* Z_B ]$ . Падающая волна равна:

$a_1 = \frac{U_1 + I_1 Z_B}{2\sqrt{Z_B}}$ ;  $\Rightarrow |a_1|^2 = P_{пад1} = \frac{1}{4Z_B} [ |U_1|^2 + |I_1|^2 Z_B^2 + 2\text{Re}U_1 I_1^* Z_B ]$ .

Получим, что  $|a|^2 - |b|^2 = \frac{1}{4Z_B} \cdot 4\text{Re}U_1 I_1^* Z_B = \text{Re}U_1 I_1^* = P_1$ , где  $P_1$  – мощность,

поглощаемая в сопротивлении нагрузки  $Z_1$  (по другому, можно записать

$\text{Re}U_1 I_1^* = \text{Re}U_1 \cdot \frac{U_1^*}{Z_1} = \frac{|U_1|^2}{\text{Re}Z_1}$ ).

Тогда, учитывая, что  $|a_1|^2 = P_{пад1}$  и  $|a_1|^2 - |b_1|^2 = P_1$ , получаем  $|b_1|^2 = P_{отр1} = P_{пад1} - P_1 = P_{г.ном} - P_1$  – баланс мощностей для ДЛ.

Отсюда очевидно, что величина мощности отраженной волны  $P_{отр1}$  показывает, насколько мощность, поглощенная во входном сопротивлении ДЛ  $Z_1$ , отличается от максимально возможной мощности  $P_{г.ном}$ , вырабатываемой генератором. Если ДЛ без потерь, то  $P_{отр} = P_{пад} - P_n$ , данное выражение описывает баланс мощностей для ДЛ без потерь.

## 1.7 Матрица рассеяния волн мощности

Введем падающую и отраженную волны мощности:

$$\left. \begin{aligned} a_i &= \frac{U_{падi}}{\sqrt{Z_0}} = I_{падi} \sqrt{Z_0}; \\ b_i &= \frac{U_{отри}}{\sqrt{Z_0}} = I_{отри} \sqrt{Z_0}; \quad i = \overline{1,2}. \end{aligned} \right\}$$

$a_i$  и  $b_i$  называют еще нормированными волнами напряжения (или тока).

Тогда получим  $|a_i|^2 = \frac{|U_{падi}|^2}{Z_0} = P_{падi}$ ;  $|b_i|^2 = \frac{|U_{отри}|^2}{Z_0} = P_{отри}$ .

Смысл величин  $|a_i|^2$  и  $|b_i|^2$  – мощность, переносимая падающей и отраженной волнами. Размерность – (Ватт)<sup>1/2</sup>. Представляют собой комплексные числа, т.е. имеют модуль и фазу.

Установим связь между волнами  $a_i$ ,  $b_i$  и напряжениями  $U_i$  и токами  $I_i$  на зажимах четырехполюсника:

$$\left. \begin{aligned} U_i &= U_{\text{пад}i} + U_{\text{отр}i} = a_i \sqrt{Z_0} + b_i \sqrt{Z_0} \\ I_i &= I_{\text{пад}i} - I_{\text{отр}i} = \frac{a_i}{\sqrt{Z_0}} + \frac{b_i}{\sqrt{Z_0}} \end{aligned} \right\}$$

Отсюда:  $a_i = \frac{U_i + I_i Z_0}{2\sqrt{Z_0}}$ ;  $b_i = \frac{U_i - I_i Z_0}{2\sqrt{Z_0}}$ ;  $i = 1, 2$ .

Величины  $a_i$  и  $b_i$  определены и в том случае, если подводящие ДЛ имеют нулевую длину, в этом случае  $Z_0$  – опорное сопротивление, которое равно сопротивлению генератора сигнала и нагрузки четырехполюсника.

Рассмотрим физический смысл волн мощности. Так как  $a_1 = \frac{U_1 + I_1 Z_0}{2\sqrt{Z_0}}$ ;

$$\Rightarrow U_1 = E_1 - I_1 Z_0; \text{ отсюда } a_1 = \frac{E_1}{2\sqrt{Z_0}}. \text{ Тогда } |a_1|^2 = P_{\text{пад}1} = \frac{|E_1|^2}{4Z_0} = P_{\text{ном}1} -$$

номинальная мощность генератора на входе, т.е.  $|a_1| = \sqrt{P_{\text{ном}1}}$ .

Если длина подводящей ЛП не равна нулю, то смысл  $|a_1|$  двоякий ( $P_{\text{пад}1}$  и  $P_{\text{ном}1}$ ). В случае нулевой длины ЛП – волны отсутствуют и мы получаем, что  $|a_1| = \sqrt{P_{\text{ном}1}}$ .

Для отраженной волны на входе  $b_1 = \frac{U_1 - I_1 Z_0}{2\sqrt{Z_0}}$ ; отсюда

$$|b_1|^2 = \frac{|U_1 - I_1 Z_0|^2}{4Z_0} = \frac{1}{4Z_0} [ |U_1|^2 + |I_1|^2 Z_0^2 - 2\text{Re}U_1 I_1^* \cdot Z_0 ];$$

$$|a_1|^2 = \frac{|U_1 + I_1 Z_0|^2}{4Z_0} = \frac{1}{4Z_0} [ |U_1|^2 + |I_1|^2 Z_0^2 + 2\text{Re}U_1 I_1^* \cdot Z_0 ];$$

тогда  $|a_1|^2 - |b_1|^2 = \text{Re}(U_1 \cdot I_1^*) = \text{Re}(I_1 \cdot Z_{\text{вх}} \cdot I_1^*) = |I_1|^2 \cdot \text{Re}Z_{\text{вх}} = P_1$  – мощность, поглощаемая во входном сопротивлении четырехполюсника.

Имеем:  $|a_1|^2 - |b_1|^2 = P_{\text{ном}1} - |b_1|^2 = P_1$ ;  $|b_1|^2 = P_{\text{отр}1} = P_{\text{пад}1} - P_1$ .

Мощность  $|b_1|^2 = P_{\text{отр}1}$  – равна разности между номинальной мощностью генератора и мощностью, поглощенной во входном сопротивлении четырехполюсника. Эту мощность можно приписать действию генератора, поглощающего отраженную волну  $b_i$ .

Если длина подводящей ЛП не равна нулю, то  $|b_1|^2 = P_{\text{отр}1} = P_{\text{пад}1} - P_1$ .

Если длина подводящей ЛП нулевая, то  $|b_1|^2 = P_{\text{ном}1} - P_1$ .

*Матрица рассеяния* ([S]) связывает между собой волны мощности на входе и выходе четырехполюсника:

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= S_{11}a_1 + S_{12}a_2 \\ b_2 &= S_{21}a_1 + S_{22}a_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix};$$

или в матричной форме  $[\mathbf{b}] = [\mathbf{S}] \cdot [\mathbf{a}]$ .

Так как величины  $a_i$  и  $b_i$  представляют собой нормированные волны напряжения или тока, то матрица  $[\mathbf{S}]$  – тоже получается нормированная.

*Физический смысл S-параметров.*

$$1) \quad S_{11} = \left. \frac{b_1}{a_1} \right|_{a_2=0} \Rightarrow S_{11} = \frac{b_1}{a_1} = \frac{U_1 - I_1 Z_0}{U_1 + I_1 Z_0} = \frac{Z_{\text{вх}} - Z_0}{Z_{\text{вх}} + Z_0} = \Gamma_{\text{вх}} \quad - \text{коэффициент}$$

отражения от входа четырехполюсника при отсутствии падающей волны на выходе ( $a_2 = 0$ ), т.е. при нагружении его на нагрузку  $Z_0$ .

$$\text{Отсюда } |s_{11}|^2 = \frac{|b_1|^2}{|a_1|^2} = \frac{P_{\text{отр1}}}{P_{\text{ном1}}} = \frac{P_{\text{ном1}} - P_1}{P_{\text{ном1}}}.$$

$$2) \quad S_{21} = \left. \frac{b_2}{a_1} \right|_{a_2=0} \cdot a_2 = \frac{U_2 + I_2 Z_0}{2\sqrt{Z_0}}; b_2 = \frac{U_2 - I_2 Z_0}{2\sqrt{Z_0}}. \text{ Если } a_2 = 0, \text{ тогда}$$

$U_2 = -I_2 Z_0$  ( $E_2 = 0$ ), получаем  $b_2 = \frac{U_2}{\sqrt{Z_0}}$  – определяется напряжением на выходе.

Учитывая, что  $a_1 = \frac{E_1}{2\sqrt{Z_0}}$ , получим  $S_{21} = \left. \frac{b_2}{a_1} \right|_{a_2=0} = \frac{2U_2}{E_1} = \frac{U_2}{E_1/2} = 2K_E = K_{E/2}$  –

коэффициент передачи относительно половины Э.Д.С. источника сигнала.

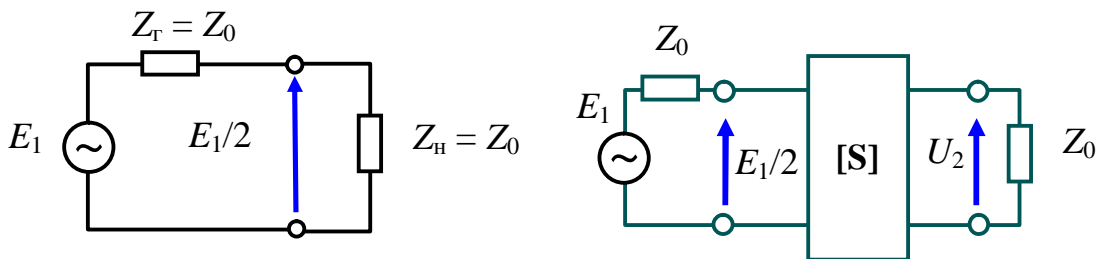


Рисунок 24 – Иллюстрация к определению  $S_{21}$

Таким образом (см. рис. 24), значение  $S_{21}$  совпадает с коэффициентом передачи четырехполюсника по напряжению при  $Z_r = Z_n = Z_0$ .

$$|S_{21}|^2 = \frac{|b_2|^2}{|a_1|^2} = \frac{P_{\text{отр2}}}{P_{\text{пад1}}} = \frac{\text{мощность отраженной волны на входе 2}}{\text{мощность падающей волны на входе 1}}. \quad \text{Так как}$$

$$|b_2|^2 = \frac{|U_2|^2}{Z_0} = P_n, \quad \text{то}$$

$|S_{21}|^2 = \frac{P_H}{P_{НОМ1}} = \frac{\text{мощность, поглощаемая в нагрузке}}{\text{номинальная мощность генератора}} = G_{НОМ} \Big|_{Z_H=Z_0}$ . Отсюда видно, что величина  $|S_{21}|^2$  совпадает с коэффициентом передачи четырехполюсника по мощности при условии  $Z_T = Z_H = Z_0$ .

Таким образом, S-параметры имеют ясный физический смысл:

- 1)  $S_{11}$  – коэффициент отражения на входе четырехполюсника (связан с  $Z_{ВХ}$ );
- 2)  $S_{21}$  – коэффициент передачи по напряжению;
- 3)  $|S_{21}|^2$  – коэффициент передачи по мощности;

при условии, что четырехполюсник на входе и выходе нагружен на нагрузку  $Z_0$  (обычно 50 Ом).

Аналогично можно определить физический смысл параметров  $S_{22}$  и  $S_{12}$  при подаче напряжения на выходные зажимы четырехполюсника.

$$S_{22} = \left. \frac{b_2}{a_2} \right|_{a_1=0} = \frac{Z_{ВЫХ} - Z_0}{Z_{ВЫХ} + Z_0} = \Gamma_{ВЫХ} - \text{выходной коэффициент отражения при}$$

нагрузении его со стороны входа на  $Z_0$ .

$$S_{12} = \left. \frac{b_1}{a_2} \right|_{a_1=0} = \frac{2U_1}{E_2} - \text{обратный коэффициент передачи четырехполюсника.}$$

Волны мощности нормируются относительно конкретного опорного сопротивления  $Z_0$  (волнового сопротивления подводящих ЛП (тракта)  $Z_0$ ). Поэтому S-параметры также определяются относительно заданного опорного сопротивления (определяются в тракте с заданным волновым сопротивлением  $Z_0$ ). Величина элементов матрицы  $[S]$  зависит от  $Z_0$ , т.е. от нагрузок четырехполюсника.

Чаще всего S-параметры определяются в тракте со стандартным значением волнового сопротивления (50 Ом). Такие S-параметры называют *стандартными* параметрами. Величина волнового сопротивления тракта равная 50 Ом исторически была выбрана исходя из компромисса между потерями в тракте и максимальной мощностью, которую можно передать. Для иллюстрации этого факта на рис. 25 для воздушной коаксиальной ЛП приведена зависимость потерь (рис. 25,а) и максимальной передаваемой мощности (рис. 25,б) от ее волнового сопротивления.



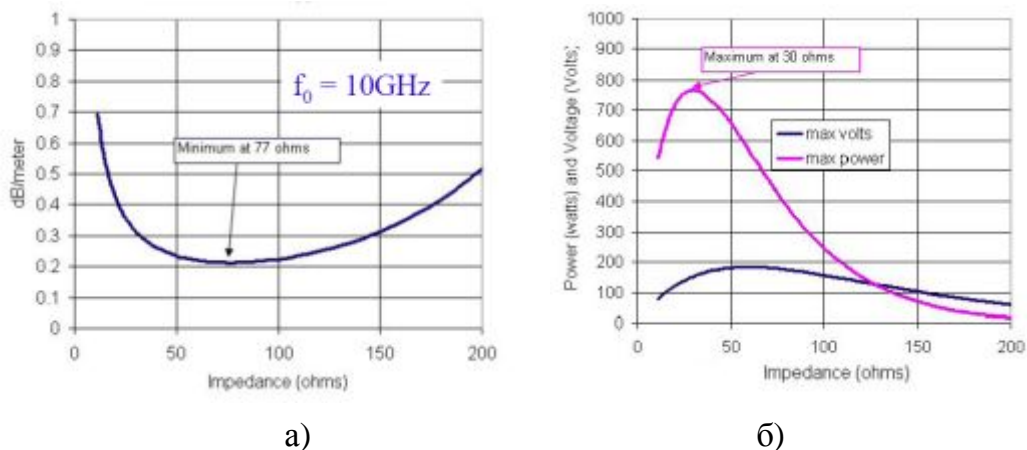


Рисунок 25 – Зависимость потерь (а) и максимальной передаваемой мощности (б) от волнового сопротивления ЛП (воздушной коаксиальной ЛП)

Видно, что максимальная мощность в линии передается при ее волновом сопротивлении 30 Ом, а минимум потерь достигается при сопротивлении 77 Ом. Таким образом, выбор в качестве стандарта величины 50 Ом – это компромиссное решение.

*Достоинства применения S-параметров:*

- 1) Они связывают между собой волны мощности, которые несут информацию о мощности и фазе сигнала – величинах, которые можно определить и непосредственно измерить на СВЧ (в отличие от напряжений и токов). Зачастую описание процесса передачи сигнала с помощью параметров рассеяния более простое и наглядное, чем с помощью классических матриц (так как основной интерес представляет мощность передаваемого сигнала).
- 2) Элементы матрицы рассеяния имеют ясный физический смысл. Поэтому они часто используются в качестве рабочих параметров СВЧ элементов и устройств.
- 3) Матрица рассеяния существует практически для всех типов элементов СВЧ цепей и устройств.
- 4) Элементы матрицы рассеяния можно точно и сравнительно легко измерить: а) при измерениях четырехполюсник нагружен на сопротивления  $Z_0$  – такой режим легко обеспечить на СВЧ, включив четырехполюсник в тракт со стандартным волновым сопротивлением (нагрузки  $Z_0$  могут быть на удалении от входов измеряемого четырехполюсника); б) амплитуды и фазы падающей и отраженной волн одинаковы в любом сечении ДЛ без потерь (в отличие от напряжений и

токов). Поэтому при измерении S-параметров точка подключения измерительного устройства может быть выбрана на некотором удалении от самого четырехполюсника (это удобно с практической точки зрения в диапазоне СВЧ); в СВЧ транзисторы при заданных нагрузках 50 Ом, как правило, являются устойчивыми приборами и не возбуждаются.

Указанные причины определили широкое использование параметров

### **1.8 Связь матрицы параметров рассеяния с классическими матрицами**

Так как все системы параметров связывают между собой напряжения и токи (или их линейные комбинации), то существует возможность пересчета параметров из одной системы в другую. Рассмотрим для примера связь между S-параметрами и Z-параметрами.

Системы уравнений имеют следующий вид:

$$[\mathbf{b}] = [\mathbf{S}] \cdot [\mathbf{a}]; [\mathbf{U}] = [\mathbf{Z}] \cdot [\mathbf{I}].$$

Выразим матрицу  $[\mathbf{Z}]$  через  $[\mathbf{S}]$ . Имеем:

$$[\mathbf{U}] = \sqrt{Z_0} ([\mathbf{a}] + [\mathbf{b}]) = \sqrt{Z_0} ([\mathbf{a}] + [\mathbf{S}] \cdot [\mathbf{a}]) = \sqrt{Z_0} ([\mathbf{1}] + [\mathbf{S}]) \cdot [\mathbf{a}];$$

$$[\mathbf{I}] = \frac{1}{\sqrt{Z_0}} ([\mathbf{a}] - [\mathbf{b}]) = \frac{1}{\sqrt{Z_0}} ([\mathbf{a}] - [\mathbf{S}] \cdot [\mathbf{a}]) = \frac{1}{\sqrt{Z_0}} ([\mathbf{1}] - [\mathbf{S}]) \cdot [\mathbf{a}].$$

Подставим полученные формулы в выражение  $[\mathbf{U}] = [\mathbf{Z}] \cdot [\mathbf{I}]$ :

$$\sqrt{Z_0} ([\mathbf{1}] + [\mathbf{S}]) \cdot [\mathbf{a}] = [\mathbf{Z}] \frac{1}{\sqrt{Z_0}} ([\mathbf{1}] - [\mathbf{S}]) \cdot [\mathbf{a}], \text{ домножив правую и левую}$$

части на  $\frac{1}{\sqrt{Z_0}} [\mathbf{a}]^{-1}$ , получим:  $([\mathbf{1}] + [\mathbf{S}]) = \frac{1}{Z_0} [\mathbf{Z}]([\mathbf{1}] - [\mathbf{S}])$ . Далее можно

получить две альтернативные формы связи S- и Z-параметров.

$$\text{Первая: } \frac{1}{Z_0} [\mathbf{Z}] = ([\mathbf{1}] + [\mathbf{S}]) \cdot ([\mathbf{1}] - [\mathbf{S}])^{-1} \text{ или}$$

$$[\mathbf{z}] = ([\mathbf{1}] + [\mathbf{S}]) \cdot ([\mathbf{1}] - [\mathbf{S}])^{-1},$$

где  $[\mathbf{z}] = \frac{1}{Z_0} [\mathbf{Z}]$ , нормированная к  $Z_0$  матрица полных сопротивлений.

Вторая альтернативная форма:

$$([\mathbf{1}] + [\mathbf{S}]) = [\mathbf{z}]([\mathbf{1}] - [\mathbf{S}]); \quad ([\mathbf{1}] + [\mathbf{S}]) = [\mathbf{z}] - [\mathbf{z}] \cdot [\mathbf{S}];$$

$$2[\mathbf{1}] = [\mathbf{z}] - [\mathbf{z}] \cdot [\mathbf{S}] - [\mathbf{S}] + [\mathbf{1}]; \quad 2[\mathbf{1}] = ([\mathbf{z}] + [\mathbf{1}]) \cdot ([\mathbf{1}] - [\mathbf{S}]);$$

$$[\mathbf{z}] + [\mathbf{1}] = 2([\mathbf{1}] - [\mathbf{S}])^{-1}; \text{ таким образом, окончательно получим:}$$

$$[\mathbf{z}] = 2([\mathbf{1}] - [\mathbf{S}])^{-1} - [\mathbf{1}].$$

Обратная связь Z- и S-параметров:

$$[\mathbf{a}] = \frac{1}{2\sqrt{Z_0}} ([\mathbf{U}] + Z_0[\mathbf{I}]) = \frac{1}{2\sqrt{Z_0}} ([\mathbf{Z}] \cdot [\mathbf{I}] + Z_0[\mathbf{I}]) = \frac{1}{2\sqrt{Z_0}} ([\mathbf{Z}] + Z_0[\mathbf{1}]) \cdot [\mathbf{I}];$$

$$[\mathbf{b}] = \frac{1}{2\sqrt{Z_0}} ([\mathbf{U}] - Z_0[\mathbf{I}]) = \frac{1}{2\sqrt{Z_0}} ([\mathbf{Z}] - Z_0[\mathbf{1}]) \cdot [\mathbf{I}].$$

Подставляем полученные выражения для волн в  $[\mathbf{b}] = [\mathbf{S}] \cdot [\mathbf{a}]$ :

$$\frac{1}{2\sqrt{Z_0}} ([\mathbf{Z}] - Z_0[\mathbf{1}]) \cdot [\mathbf{I}] = [\mathbf{S}] \cdot \frac{1}{2\sqrt{Z_0}} ([\mathbf{Z}] + Z_0[\mathbf{1}]) \cdot [\mathbf{I}]; \Rightarrow$$

$$[\mathbf{Z}] - Z_0[\mathbf{1}] = [\mathbf{S}] \cdot ([\mathbf{Z}] + Z_0[\mathbf{1}]); \quad [\mathbf{S}] = ([\mathbf{Z}] - Z_0[\mathbf{1}]) \cdot ([\mathbf{Z}] + Z_0[\mathbf{1}])^{-1}.$$

Окончательно имеем:  $[\mathbf{S}] = ([\mathbf{z}] - [\mathbf{1}]) \cdot ([\mathbf{z}] + [\mathbf{1}])^{-1}$ .

Аналогично можно получить выражения, связывающие Y- и S-параметры:

$$[\mathbf{y}] = ([\mathbf{1}] - [\mathbf{S}]) \cdot ([\mathbf{1}] + [\mathbf{S}])^{-1}; \quad [\mathbf{S}] = ([\mathbf{1}] - [\mathbf{y}]) \cdot ([\mathbf{1}] + [\mathbf{y}])^{-1}.$$

Сведем выражение для связи параметров рассеяния с другими классическими матрицами в табл. 1.3.

Таблица 1.3 – Связь между элементами классических и волновых матриц четырехполюсника

	<b>Z</b>	<b>Y</b>	<b>A</b>	<b>H</b>
$\beta$	$\det \mathbf{Z} + z_{11} + z_{22} + 1$	$\det \mathbf{Y} + y_{11} + y_{22} + 1$	$a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22}$	$\det \mathbf{H} + h_{11} + h_{22} + 1$
$\gamma_1$	$\det \mathbf{Z} + z_{11} - z_{22} - 1$	$-\det \mathbf{Y} - y_{11} + y_{22} + 1$	$a_{11} + a_{12} - a_{21} - a_{22}$	$\det \mathbf{H} + h_{11} - h_{22} - 1$
$\gamma_2$	$\det \mathbf{Z} - z_{11} + z_{22} - 1$	$-\det \mathbf{Y} + y_{11} - y_{22} + 1$	$-a_{11} + a_{12} - a_{21} + a_{22}$	$-\det \mathbf{H} + h_{11} - h_{22} + 1$
<b>S</b>	$\frac{1}{\beta} \begin{bmatrix} \gamma_1 & 2z_{12} \\ 2z_{21} & \gamma_2 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\beta} \begin{bmatrix} \gamma_1 & -2y_{12} \\ -2y_{21} & \gamma_2 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\beta} \begin{bmatrix} \gamma_1 & 2\det \mathbf{A} \\ 2 & \gamma_2 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\beta} \begin{bmatrix} \gamma_1 & 2h_{12} \\ -2h_{21} & \gamma_2 \end{bmatrix}$

Применение полученных формул для четырехполюсника дает следующие соотношения:

$$z_{ii} = \frac{(1 + S_{ii})(1 - S_{jj}) + S_{ij}S_{ji}}{D_{SZ}}; \quad z_{ij} = \frac{2S_{ij}}{D_{SZ}}; \quad D_{SZ} = (1 - S_{11})(1 - S_{22}) - S_{12}S_{21};$$

$$y_{ii} = \frac{(1 - S_{ii})(1 + S_{jj}) + S_{ij}S_{ji}}{D_{SY}}; \quad y_{ij} = \frac{-2S_{ij}}{D_{SY}}; \quad D_{SY} = (1 + S_{11})(1 + S_{22}) - S_{12}S_{21};$$

$$S_{ii} = \frac{(z_{ii} - 1)(z_{jj} + 1) - z_{ij}z_{ji}}{D_{ZS}}; \quad S_{ij} = \frac{2z_{ij}}{D_{ZS}}; \quad D_{ZS} = (1 + z_{11})(1 + z_{22}) - z_{12}z_{21};$$

$$S_{ii} = \frac{(1 - y_{ii})(1 + y_{jj}) + y_{ij}y_{ji}}{D_{Y_S}}; \quad S_{ij} = \frac{-2y_{ij}}{D_{Y_S}}; \quad D_{Y_S} = (1 + y_{11})(1 + y_{22}) - y_{12}y_{21}.$$

## 1.9 Обобщенные параметры рассеяния

Обобщим понятие волн мощности и параметров рассеяния на случай произвольных комплексных нагрузок.

Для схемы на рис. 26 волны мощности  $a_1$  и  $b_1$  определяются формулами:

$$a_1 = \frac{U_1 + Z_{\Gamma} I_1}{2\sqrt{\operatorname{Re} Z_{\Gamma}}}; \quad b_1 = \frac{U_1 - Z_{\Gamma}^* I_1}{2\sqrt{\operatorname{Re} Z_{\Gamma}}}.$$

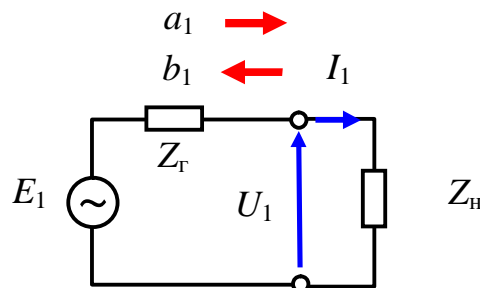


Рисунок 26 – Иллюстрация к определению волн мощности

Так как  $U_1 = E_1 - I_1 Z_{\Gamma} \Rightarrow a_1 = \frac{E_1}{2\sqrt{\operatorname{Re} Z_{\Gamma}}}$ ;  $\Rightarrow P_{\text{ном1}} = |a_1|^2 = \frac{|E_1|^2}{4 \operatorname{Re} Z_{\Gamma}}$  – номинальная

мощность генератора, реализуемая при  $Z_{\text{н}} = Z_{\Gamma}^*$ .

$$|a_1|^2 = P_{\text{пад1}} = \frac{1}{4 |\operatorname{Re} Z_{\Gamma}|} |U_1 + Z_{\Gamma} I_1|^2 = \frac{1}{4 |\operatorname{Re} Z_{\Gamma}|} [ |U_1|^2 + |I_1|^2 |Z_{\Gamma}|^2 + 2 \operatorname{Re} U_1^* I_1 Z_{\Gamma} ];$$

$$|b_1|^2 = P_{\text{отр1}} = \frac{1}{4 |\operatorname{Re} Z_{\Gamma}|} |U_1 - Z_{\Gamma}^* I_1|^2 = \frac{1}{4 |\operatorname{Re} Z_{\Gamma}|} [ |U_1|^2 + |I_1|^2 |Z_{\Gamma}|^2 - 2 \operatorname{Re} U_1^* I_1 Z_{\Gamma}^* ];$$

$$|a_1|^2 - |b_1|^2 = \frac{1}{4 |\operatorname{Re} Z_{\Gamma}|} \cdot 2 \operatorname{Re} U_1^* I_1 (Z_{\Gamma} + Z_{\Gamma}^*) = \operatorname{Re} U_1^* I_1 = \operatorname{Re} I_1^* Z_{\text{н}}^* I_1 = |I_1|^2 \operatorname{Re} Z_{\text{н}} = P_{\text{н}},$$

т.е.  $\Rightarrow P_{\text{ном1}} - |b_1|^2 = P_{\text{н}}$ .

В результате получаем, что  $P_{\text{отр1}} = |b_1|^2 = P_{\text{ном1}} - P_{\text{н}}$ .

Итак, физический смысл величин  $|a_1|^2$  и  $|b_1|^2$  то же, что и для стандартных параметров рассеяния, т.е. номинальная мощность генератора и разность между мощностью генератора и мощностью, поглощаемой в нагрузке.

Коэффициент отражения:  $\Gamma'_{\text{н}} = \frac{b_1}{a_1} = \frac{U_1 - Z_{\Gamma}^* I_1}{U_1 + Z_{\Gamma} I_1} = \frac{Z_{\text{н}} - Z_{\Gamma}^*}{Z_{\text{н}} + Z_{\Gamma}}$ . В этом случае мы

имеем коэффициент отражения комплексной нагрузки относительно

комплексного сопротивления генератора. Это так называемый *обобщенный* коэффициент отражения, который характеризует передачу мощности между комплексными генератором и нагрузкой:  $|\Gamma'_H|^2 = \frac{|b_1|^2}{|a_1|^2} = \frac{P_{отр}}{P_{ном1}}$ .

Обозначим,  $\Gamma_r$  и  $\Gamma_H$  – коэффициенты отражения в стандартном тракте. Тогда можно выразить  $\Gamma'_H$  через эти коэффициенты отражения, а не через сопротивления:  $\Gamma_r = \frac{Z_r - Z_0}{Z_r + Z_0}$ ;  $\Gamma_H = \frac{Z_H - Z_0}{Z_H + Z_0}$ ;  $\Rightarrow Z_r = Z_0 \frac{1 + \Gamma_r}{1 - \Gamma_r}$ ;  $Z_H = Z_0 \frac{1 + \Gamma_H}{1 - \Gamma_H}$ , в

результате получаем:  $\Gamma'_H = \frac{\Gamma_H - \Gamma_r^*}{1 - \Gamma_r \Gamma_H}$ .

Случай отсутствия отражения ( $P_{отр} = 0$ ) соответствует требованиям:

$$Z_H = Z_r^* \text{ или } \Gamma_H = \Gamma_r^*.$$

В этом случае осуществляется режим согласования по мощности, т.е. вся поступающая от генератора мощность поглощается в нагрузке:  $P_{полг} = P_{ном1}$ .

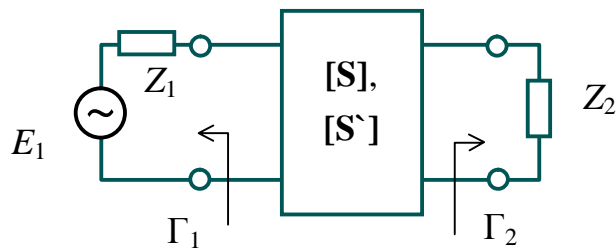


Рисунок 24 – Иллюстрация к определению обобщенных параметров рассеяния  $[S']$

Получим соотношения, связывающие обобщенные параметры рассеяния  $[S']$  для произвольных комплексных сопротивлений генератора  $Z_1$  и нагрузки  $Z_2$  (рис. 27) с известными параметрами  $[S]$ , измеренными в стандартном тракте, т.е. величины  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  также определены в стандартном тракте.

Обобщенные параметры рассеяния:

$$\left. \begin{aligned} b'_1 &= S'_{11}a'_1 + S'_{12}a'_2 \\ b'_2 &= S'_{21}a'_1 + S'_{22}a'_2 \end{aligned} \right\}$$

Стандартные параметры рассеяния:

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= S_{11}a_1 + S_{12}a_2 \\ b_2 &= S_{21}a_1 + S_{22}a_2 \end{aligned} \right\}$$

Также  $U_i = \sqrt{Z_0} (a_i + b_i)$ ;  $I_i = \frac{1}{\sqrt{Z_0}} (a_i - b_i)$ ;  $a'_1 = \frac{U_i + Z_i I_i}{2\sqrt{\text{Re } Z_i}}$ ;  $b'_1 = \frac{U_i - Z_i I_i}{2\sqrt{\text{Re } Z_i}}$ .

Установим связь между стандартными  $S$ - и обобщенными  $S'$ -параметрами. Опустив математические выкладки, запишем результирующие соотношения в матричной форме:

$$[S'] = [A]^{-1}([S] - [\Gamma^*]) \cdot ([\mathbf{1}] - [\Gamma] \cdot [S])^{-1} [A^*],$$

где  $[A] = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$ ;  $[\Gamma] = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & 0 \\ 0 & \Gamma_2 \end{bmatrix}$ ;  $A_i = (1 - \Gamma_i^*) \frac{\sqrt{1 - |\Gamma_i|^2}}{|1 - \Gamma_i|}$ .

Эти выражения справедливы и в случае  $N$ -полносника.

Для четырехполносника, выполнив все действия, получим:

$$S'_{11} = \frac{A_1^*}{A_1} \cdot \frac{S_{11} - \Gamma_1^* - \Gamma_2 \Delta + S_{22} \Gamma_1^* \Gamma_2}{D}; \quad S'_{12} = \frac{A_2^*}{A_1} \cdot \frac{S_{12}(1 - |\Gamma_1|^2)}{D};$$

$$S'_{21} = \frac{A_1^*}{A_2} \cdot \frac{S_{21}(1 - |\Gamma_2|^2)}{D}; \quad S'_{22} = \frac{A_2^*}{A_2} \cdot \frac{S_{22} - \Gamma_2^* - \Gamma_1 \Delta + S_{11} \Gamma_1 \Gamma_2^*}{D},$$

где  $D = 1 - S_{11} \Gamma_1 - S_{22} \Gamma_2 + \Gamma_1 \Gamma_2 \Delta$ ;  $\Delta = S_{11} S_{22} - S_{12} S_{21}$ ;

$\Gamma_i = \frac{(Z_i - Z_0)}{(Z_i + Z_0)}$  – коэффициенты отражения от входной и выходной нагрузки

$$Z_i; \quad A_i = \frac{1 - \Gamma_i^*}{|1 - \Gamma_i|} \sqrt{1 - |\Gamma_i|^2}; \quad i = 1, 2; \quad Z_0 = 50 \text{ Ом.}$$

Параметры  $S'_{ij}$  ( $i = 1, 2; j = 1, 2$ ) характеризуют связь падающей и отраженной волн на входах четырехполносника при комплексных нагрузках.

### Физический смысл обобщенных параметров рассеяния.

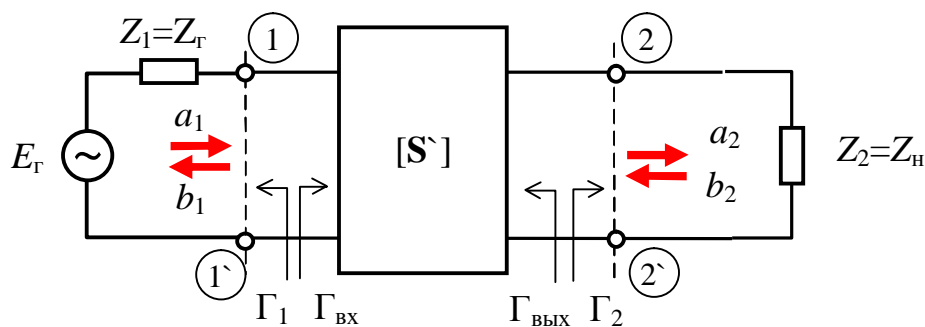


Рисунок 27 – Обобщенные параметры рассеяния

$$S'_{11} = \frac{Z_{\text{ВХ}} - Z_1^*}{Z_{\text{ВХ}} + Z_1} = \frac{\Gamma_{\text{ВХ}} - \Gamma_1^*}{1 - \Gamma_1 \Gamma_{\text{ВХ}}} - \text{коэффициент отражения в сечении } 1 - 1'; \text{ если}$$

$S'_{11} = 0$ , тогда  $Z_{\text{ВХ}} = Z_1^*$ ,  $\Gamma_{\text{ВХ}} = \Gamma_1^*$ , т.е. реализуется режим сопряженного согласования на входе; в этом случае  $P_{\text{отр}1} = 0$ .

$$S'_{22} = \frac{Z_{\text{ВЫХ}} - Z_2^*}{Z_{\text{ВЫХ}} + Z_2} = \frac{\Gamma_{\text{ВЫХ}} - \Gamma_2^*}{1 - \Gamma_2 \Gamma_{\text{ВЫХ}}} - \text{коэффициент отражения в сечении } 2 - 2';$$

если  $S'_{22} = 0$ , тогда  $Z_{\text{ВЫХ}} = Z_2^*$ ,  $\Gamma_{\text{ВЫХ}} = \Gamma_2^*$ , т.е. реализуется режим сопряженного согласования на выходе; в этом случае  $P_{\text{отр}2} = 0$ .

В случае  $S'_{11} = 0$  мощность полностью передается от генератора на вход четырехполюсника, реализуется номинальная мощность генератора:  $P_{\text{ВХ}} = P_{\text{НОМ}1}$ .

В случае  $S'_{22} = 0$  мощность полностью передается от четырехполюсника в нагрузку, реализуется номинальная выходная мощность четырехполюсника (эквивалентного генератора).

$$\text{Коэффициент передачи. Отраженная волна на выходе } b_2 = \frac{U_2 - I_2 Z_2^*}{2\sqrt{\text{Re } Z_2}}; \Rightarrow$$

$$b_2 = \frac{-I_2(Z_2 + Z_2^*)}{2\sqrt{\text{Re } Z_2}} = -I_2\sqrt{\text{Re } Z_2}; \Rightarrow |b_2|^2 = |I_2|^2 \text{Re } Z_2 = P_{\text{Н}2} - \text{мощность в нагрузке.}$$

$$\text{Падающая волна на входе } a_1 = \frac{E_1}{2\sqrt{\text{Re } Z_{\Gamma}}}; \Rightarrow |a_1|^2 = \frac{|E_1|^2}{4\text{Re } Z_{\Gamma}} = P_{\text{НОМ}1} -$$

номинальная мощность генератора.

$$|S'_{21}|^2 = \frac{|b_2|^2}{|a_1|^2} = \frac{P_{\text{Н}2}}{P_{\text{НОМ}1}} = K_P - \text{коэффициент передачи четырехполюсника}$$

по мощности при комплексных нагрузках.

Итак, по матрице  $[S']$  четырехполюсника можно определить коэффициент передачи по мощности, коэффициенты отражения в сечениях (местах подключения) генератора и нагрузки.

Важным результатом такого обобщения явилось то, что теперь S-параметры могут быть использованы для описания цепей с сосредоточенными постоянными при произвольных нагрузках. Действительно, в системе уравнений (рис. ) подводящие линии отсутствуют (можно считать, что они нулевой длины). Понятия падающей и отраженной волн при этом – фиктивные, так как их реально нет.

Мощность падающей волны связывают с номинальной мощностью генератора  $P_{\text{ном}}$ , а мощность отраженной волны – с разницей между  $P_{\text{ном}}$  и мощностью, проходящей в нагрузку.

Таким образом, обобщенные  $S$ -параметры могут использоваться для описания цепей в НЧ диапазоне. При этом, в ряде случаев, они могут быть более удобными, чем  $Z$ - или  $Y$ -параметры, так как имеют ясный физический смысл и описывают передачу мощности при реальных (комплексных) нагрузках.



## 1.10 Свойства матрицы рассеяния для различных классов СВЧ цепей

### 1.10.1 Взаимные и невзаимные цепи

Взаимные N-полюсники (четырёхполюсники) удовлетворяют теореме взаимности (обратности) для любых двух входов.

Многополюсник отвечает принципу *взаимности*, если некоторая Э.Д.С. в цепи одного из входов этого многополюсника создает в цепи другого замкнутого (КЗ) входа электрический ток, то при перемещении этой Э.Д.С. в цепь другого входа в цепи первого замкнутого входа появится точно такой же ток (рис. 29).

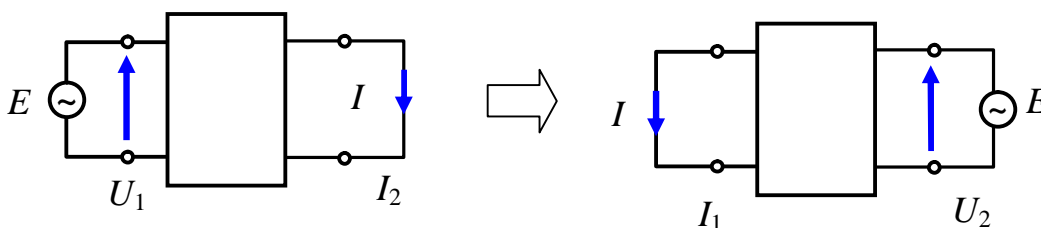


Рисунок 29 – Взаимный четырехполюсник

Для четырехполюсника на рис. 29 выполняются условия:  $\frac{I_2}{U_1} = \frac{I_1}{U_2} = \frac{I}{E}$ .

В этом случае Y-матрица взаимного четырехполюсника будет симметричной относительно главной диагонали:  $[\mathbf{y}] = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{12} & y_{22} \end{bmatrix}$ , т.е.  $y_{12} = y_{21}$ .

Для случая взаимного N-полюсника:  $y_{ji} = y_{ij}$ .

Обозначим симметричную матрицу для взаимных четырехполюсников как  $[\mathbf{Y}] = [\mathbf{Y}]_t$ .

Используя формулы для связи матриц  $[\mathbf{Y}]$  и  $[\mathbf{S}]$ , нетрудно убедиться, что для взаимных многополюсников матрица рассеяния также будет симметричной, т.е.  $[\mathbf{S}] = [\mathbf{S}]_t$ , т.е. для взаимного четырехполюсника также выполняется условие  $S_{12} = S_{21}$ .

Взаимными являются пассивные устройства, состоящие из  $R$ ,  $L$ ,  $C$  элементов и отрезков ЛП, например фильтры, аттенуаторы и пр. Как правило, активные устройства не являются взаимными, например, для транзистора  $S_{12} \neq S_{21}$ . Однако существуют и пассивные устройства, которые не являются взаимными.

К таким устройствам можно отнести вентиль. **Вентиль** – это пассивное СВЧ устройство, пропускающее сигнал (мощность) только в одном

направлении. Матрица рассеяния идеального вентиля имеет вид:

$$[\mathbf{S}] = e^{-j\varphi} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Другим пассивным устройством, которое не обладает свойством взаимности, является циркулятор. **Циркулятор** (лат. *circularis* ходить по кругу) — многоплечее (многополюсное) устройство для направленной передачи энергии электромагнитных колебаний (радио- или оптических): энергия, подведённая к одному из плеч, передаётся в другое (строго определённое) плечо в соответствии с порядком их чередования.

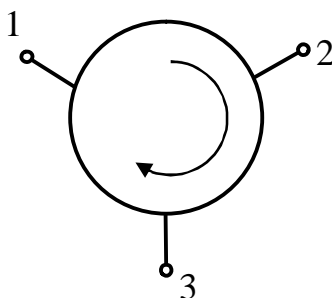


Рисунок 30 – Циркулятор с тремя полюсами

Циркуляторы применяются в качестве развязывающих устройств и обладают следующими свойствами: сигнал (см. рис. 30), подведённый к плечу 1 циркулятора, выходит из плеча 2, а сигнал, введённый в плечо 2, выходит из плеча 3 и т. д. Матрица рассеяния идеального циркулятора имеет вид:

$$[\mathbf{S}] = e^{-j\varphi} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

### 1.10.2 Симметричные цепи

Если  $[\mathbf{S}]$  матрицу многополюсника можно в виде симметричных блоков, то цепь является симметричной, например для симметричного

четырёхполюсника:  $S_{11} = S_{22}$ ,  $S_{12} = S_{21}$ , т.е.  $[\mathbf{S}] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12} & S_{11} \end{bmatrix}$ . Примером

симметричной цепи может служить отрезок ЛП (рис. 31,а) или П-образная СЦ, с одинаковыми емкостями (рис. 31,б).

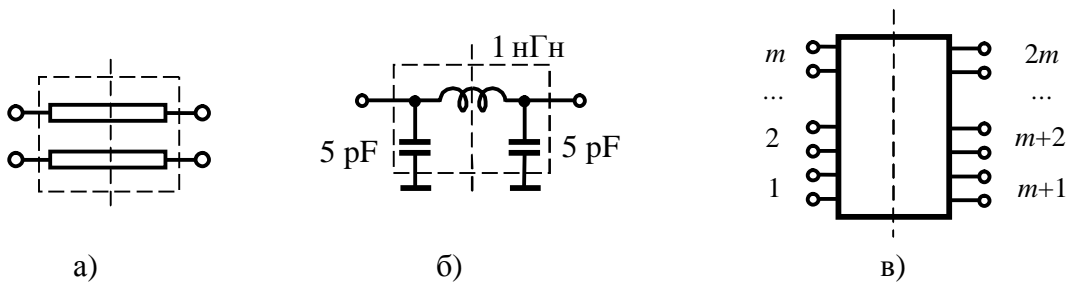


Рисунок 31 – Симметричные цепи: а) отрезок ЛП; б) П-образная ЦЦ; в)  $N$ -полюсник

Для многополюсника (рис. 31,в) в  $[S]$  матрице также выделяются  $2m$  пар зажимов, относительно которых многополюсник также является симметричным:

$$[S] = \begin{bmatrix} [S_{11}] & [S_{12}] \\ [S_{12}] & [S_{11}] \end{bmatrix}, \text{ где } [S_{ij}] \text{ – подматрицы размером } m \times m.$$

### 1.10.3 Активные, пассивные и реактивные цепи

В зависимости от способа поглощения мощности, либо, наоборот, генерирования или усиления мощности, различают активные и пассивные цепи.

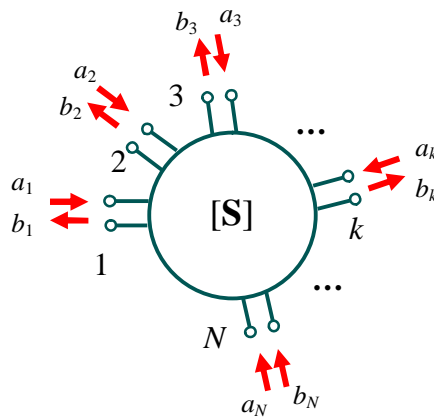


Рисунок 32 – Многополюсник (N-port)

Рассмотрим  $N$ -полюсник (рис. 32). Можно определить:

а)  $P_{\text{пад}} = \sum_{i=1}^n |a_i|^2$  – суммарная мощность падающих волн (мощность, поступающая на  $N$ -полюсник);

б)  $P_{\text{отр}} = \sum_{i=1}^n |b_i|^2$  – суммарная мощность отраженных волн;

в)  $P_{\text{погл}} = P_{\text{пад}} - P_{\text{отр}}$  – суммарная мощность, поглощаемая в  $N$ -полюснике.

Таким образом, исходя из величин этих мощностей можно

классифицировать СВЧ цепи (рис. 33) как:

- пассивные СВЧ цепи:  $P_{\text{погл}} \geq 0$ ;
- активные СВЧ цепи:  $P_{\text{погл}} < 0$  (т.е. мощность выделяется);
- диссипативные (с потерями) СВЧ цепи:  $P_{\text{погл}} > 0$ ;
- недиссипативные (без потерь):  $P_{\text{погл}} = 0$ .

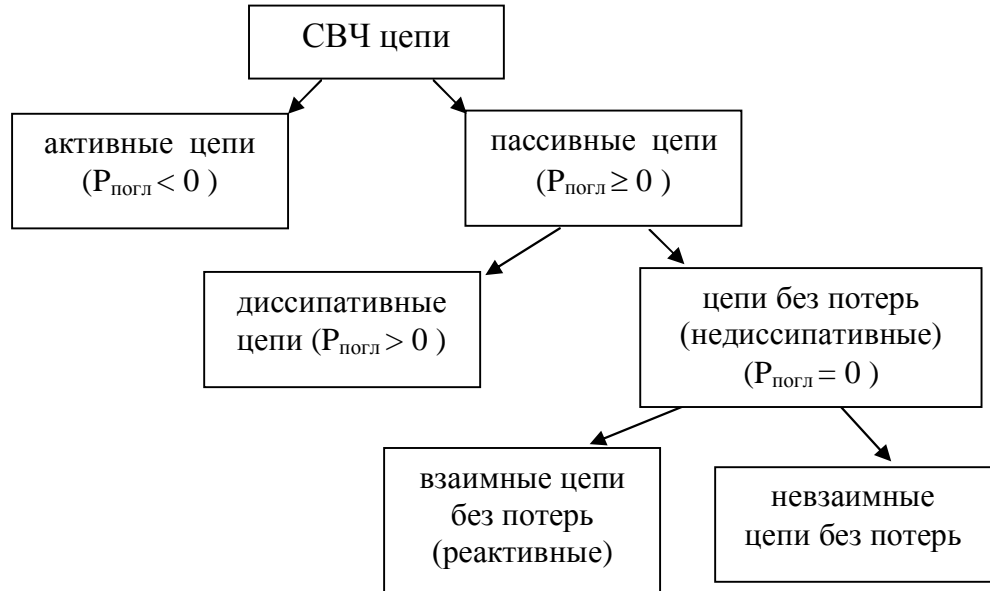


Рисунок 33 – Классификация СВЧ цепей

Выразим условия пассивности СВЧ цепи в терминах S-параметров.

$$P_{\text{пад}} = \sum_{i=1}^n |a_i|^2 = \sum_{i=1}^n (a_i \cdot a_i^*) = a_1 \cdot a_1^* + a_2 \cdot a_2^* + \dots + a_n \cdot a_n^*$$

или в матричной форме:

$$P_{\text{пад}} = [\mathbf{a}]^+ \cdot [\mathbf{a}] = [a_1^* \ a_2^* \ \dots \ a_n^*] \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = a_1 \cdot a_1^* + a_2 \cdot a_2^* + \dots + a_n \cdot a_n^*,$$

где  $[\mathbf{a}] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ ;  $[\mathbf{a}]^+ = [\mathbf{a}^*]^T = [a_1^* \ a_2^* \ \dots \ a_n^*]$  – эрмитово-сопряженная матрица (вектор).

$$P_{\text{отр}} = \sum_{i=1}^n |b_i|^2 = \sum_{i=1}^n (b_i \cdot b_i^*) = [\mathbf{b}]^+ \cdot [\mathbf{b}], \text{ где } [\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

$$[\mathbf{b}] = [\mathbf{S}] \cdot [\mathbf{a}]; \quad [\mathbf{b}]^+ = [\mathbf{a}]^+ \cdot [\mathbf{S}]^+;$$

$$P_{\text{погл}} = P_{\text{пад}} - P_{\text{отр}} = [\mathbf{a}]^+ \cdot [\mathbf{a}] - [\mathbf{b}]^+ \cdot [\mathbf{b}] = [\mathbf{a}]^+ \cdot [\mathbf{a}] - [\mathbf{a}]^+ \cdot [\mathbf{S}]^+ \cdot [\mathbf{S}] \cdot [\mathbf{a}] = \\ = [\mathbf{a}]^+ \cdot ([\mathbf{1}] - [\mathbf{S}]^+ \cdot [\mathbf{S}]) [\mathbf{a}] = [\mathbf{a}]^+ \cdot [\mathbf{D}_S] \cdot [\mathbf{a}],$$

где  $[\mathbf{D}_S] = ([\mathbf{1}] - [\mathbf{S}]^+ \cdot [\mathbf{S}])$  – матрица диссипации цепи, которая характеризует свойства активности и пассивности многополюсника.

1) Условие пассивности:  $P_{\text{погл}} = [\mathbf{a}]^+ \cdot [\mathbf{D}_S] \cdot [\mathbf{a}] \geq 0$  при любых  $[\mathbf{a}]$ .

Матрица  $[\mathbf{A}]$ , удовлетворяющая условию  $[\mathbf{x}]^+ \cdot [\mathbf{A}] \cdot [\mathbf{x}] \geq 0$  для любых  $[\mathbf{x}]$ , является **положительной полуопределенной**.

Таким образом, для пассивной цепи матрица диссипации  $[\mathbf{D}_S]$  должна быть положительной полуопределенной.

Для выявления этого свойства матрицы служит теорема Сильвестра, которая утверждает, что любая матрица  $[\mathbf{A}]$  является положительной полуопределенной, если все ее главные миноры неотрицательные, т.е. например для матрицы размером  $3 \times 3$ :

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{Тогда для главных миноров должно выполняться}$$

$$\text{условие: } D_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} \geq 0;$$

$$D_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} \geq 0; \quad D_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \geq 0;$$

$$\Delta_A = \det(\mathbf{A}) \geq 0.$$

Выразим свойство пассивности для четырехполюсника с матрицей рассеяния  $[\mathbf{S}] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$ .

$$\text{Эрмитово-сопряженная матрица будет равна } [\mathbf{S}]^+ = \begin{bmatrix} S_{11}^* & S_{21}^* \\ S_{12}^* & S_{22}^* \end{bmatrix}.$$

$$[\mathbf{S}]^+ \cdot [\mathbf{S}] = \begin{bmatrix} S_{11}^* & S_{21}^* \\ S_{12}^* & S_{22}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 & S_{11}^*S_{12} + S_{21}^*S_{22} \\ S_{11}S_{12}^* + S_{21}S_{22}^* & |S_{12}|^2 + |S_{22}|^2 \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned}
[\mathbf{D}_S] &= ([\mathbf{1}] - [\mathbf{S}]^+ \cdot [\mathbf{S}]) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} |S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 & S_{11}^* S_{12} + S_{21}^* S_{22} \\ S_{11} S_{12}^* + S_{21} S_{22}^* & |S_{12}|^2 + |S_{22}|^2 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 1 - |S_{11}|^2 - |S_{21}|^2 & -(S_{11}^* S_{12} + S_{21}^* S_{22}) \\ -(S_{11} S_{12}^* + S_{21} S_{22}^*) & 1 - |S_{12}|^2 - |S_{22}|^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Чтобы матрица  $[\mathbf{D}_S]$  была положительной полуопределенной необходимо выполнение условий:  $d_{11} \geq 0$ ,  $d_{22} \geq 0$ ,  $\Delta_D = d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21} \geq 0$ . Таким образом, получаем:

$$\begin{cases} d_{11} = 1 - |S_{11}|^2 - |S_{21}|^2 \geq 0; \\ d_{22} = 1 - |S_{12}|^2 - |S_{22}|^2 \geq 0; \\ \Delta_D = 1 - |S_{11}|^2 - |S_{12}|^2 - |S_{21}|^2 - |S_{22}|^2 + |\Delta|^2 \geq 0, \end{cases}$$

где  $\Delta = S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21}$  – определитель  $S$ -матрицы. Данная система определяет условие пассивности четырехполюсника в терминах  $S$ -параметров.

Если эти условия не выполняются (хотя бы одно из них), то цепь является активной, т.е.  $P_{\text{погл}} < 0$ .

Последнее условие можно также представить в другой форме:

$$U = \frac{|S_{21} - S_{12}|^2}{\Delta_D + |S_{21} - S_{12}|^2},$$

если  $\Delta_D \geq 0$ , тогда  $U \leq 1$ .

Таким образом, для пассивной цепи должно выполняться условие:  $U \leq 1$ .

Аналогичным образом можно записать условие пассивности в терминах классических матриц. Выражения для поглощаемой мощности имеют вид:

$$P_{\text{погл}} = [\mathbf{I}]^+ \cdot \frac{1}{2} ([\mathbf{Z}] + [\mathbf{Z}]^+) \cdot [\mathbf{I}] = [\mathbf{I}]^+ \cdot [\mathbf{D}_Z] \cdot [\mathbf{I}];$$

$$P_{\text{погл}} = [\mathbf{U}]^+ \cdot \frac{1}{2} ([\mathbf{Y}] + [\mathbf{Y}]^+) \cdot [\mathbf{U}] = [\mathbf{U}]^+ \cdot [\mathbf{D}_Y] \cdot [\mathbf{U}].$$

Для пассивной цепи матрицы  $[\mathbf{D}_Z]$  и  $[\mathbf{D}_Y]$  должны быть положительными полуопределенными. Исходя из этого, можно получить условия пассивности четырехполюсника в терминах  $Z$ - или  $Y$ -параметров.

Для двухполюсных элементов матрица рассеяния имеет следующий вид:  $[\mathbf{S}] = \Gamma$ ; тогда условие пассивности двухполюсника будет следующим:

$$[\mathbf{D}_S] = ([\mathbf{1}] - [\mathbf{S}]^+ \cdot [\mathbf{S}]) = 1 - \Gamma^* \cdot \Gamma = 1 - |\Gamma|^2 \geq 0 \text{ или } |\Gamma|^2 \leq 1.$$

В терминах  $Z$ -параметров:  $[\mathbf{Z}] = Z$ ;  $\Rightarrow [\mathbf{D}_Z] = \frac{1}{2} ([\mathbf{Z}]^+ + [\mathbf{Z}]) = \frac{1}{2} (Z^* + Z) = \text{Re } Z \geq 0$ .

Эти условия локальные, так как рассчитываются для одной (заданной) частоты. Глобальные условия пассивности определяются в терминах комплексных частот.

### Условия реактивности цепи.

Для цепи без потерь (недиссипативная цепь) должно выполняться условие:  $P_{\text{погл}} = 0$ . Тогда  $P_{\text{погл}} = [\mathbf{a}]^+ \cdot ([\mathbf{1}] - [\mathbf{S}]^+ \cdot [\mathbf{S}]) \cdot [\mathbf{a}] = [\mathbf{a}]^+ \cdot [\mathbf{D}_S] \cdot [\mathbf{a}] = 0$ .

Отсюда получаем, что матрица  $[\mathbf{D}_S] = 0$  или  $[\mathbf{S}]^+ \cdot [\mathbf{S}] = 1$ . Матрица  $[\mathbf{A}]$ , для которой выполняется условие  $[\mathbf{A}]^+ \cdot [\mathbf{A}] = 1$ , называется *унитарной*.

Итак, для цепи без потерь (недиссипативной цепи) матрица  $[\mathbf{S}]$  должна быть унитарной.

Для примера рассмотрим циркулятор. Матрица рассеяния для него имеет

следующий вид:  $[\mathbf{S}] = e^{-j\varphi} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

Тогда  $[\mathbf{S}]^+ \cdot [\mathbf{S}] = e^{j\varphi} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot e^{-j\varphi} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [\mathbf{1}]$ , т.е. идеальный

циркулятор – устройство без потерь.

С другой стороны для вентиля получаем:

$$[\mathbf{S}]^+ \cdot [\mathbf{S}] = e^{j\varphi} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot e^{-j\varphi} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq [\mathbf{1}], \text{ т.е. вентиль – устройство с}$$

потерями, в нем реализуется поглощение обратной волны.

Для реактивной цепи (недиссипативной и взаимной) матрица рассеяния должна отвечать условиям:  $[\mathbf{S}]^+ \cdot [\mathbf{S}] = [\mathbf{1}]$ ;  $[\mathbf{S}] = [\mathbf{S}]_t$ . Рассмотрим, какие ограничения на матрицу  $[\mathbf{S}]$  четырехполюсника накладывают условия недиссипативности и взаимности:

$$[\mathbf{S}]^+ \cdot [\mathbf{S}] = \begin{bmatrix} S_{11}^* & S_{21}^* \\ S_{12}^* & S_{22}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}S_{11}^* + S_{21}S_{21}^* & S_{11}S_{12} + S_{21}S_{22}^* \\ S_{11}S_{12}^* + S_{21}S_{22}^* & S_{12}S_{12}^* + S_{22}S_{22}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{В результате имеем: } \begin{cases} |S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 = 1; \\ |S_{12}|^2 + |S_{22}|^2 = 1; \\ S_{11}^*S_{12} + S_{21}^*S_{22} = 0. \end{cases}$$

Последнее условие приводит к следующим выражениям:

$$|S_{11}| \cdot |S_{12}| = |S_{21}| \cdot |S_{22}|; \quad -\varphi_{11} + \varphi_{12} = -\varphi_{21} + \varphi_{22} \pm \pi$$

$$\text{или } \frac{|S_{11}|}{|S_{22}|} = \frac{|S_{21}|}{|S_{12}|}.$$

Подставив данное выражение в другие условия, получаем:

$$\frac{|S_{11}|}{|S_{22}|} = \frac{\sqrt{1-|S_{11}|^2}}{\sqrt{1-|S_{22}|^2}}.$$

Решив данное уравнение, получим:  $|S_{11}| = |S_{22}|$ ;  $|S_{12}| = |S_{21}|$ ;

$$\varphi_{11} + \varphi_{22} = \varphi_{12} + \varphi_{21} \pm \pi.$$

Из этих выражений следует, что недиссипативный четырехполюсник не может быть вентилем, а может являться только невзаимным фазовращателем.

Для взаимной реактивной цепи  $\varphi_{12} = \varphi_{21}$ , тогда  $\varphi_{22} = 2\varphi_{21} - \varphi_{11} \pm \pi$ .

Рассмотрим реактивную СЦ (рис. 33). Пусть  $S_{11} = |\Gamma| \cdot e^{j\alpha} = \Gamma$  – входной коэффициент отражения СЦ, нагруженной на  $Z_0$ . Тогда из условий реактивности СЦ, получаем:  $S_{12} = S_{21} = \sqrt{1-|\Gamma|^2} \cdot e^{j\Theta}$ ;  $S_{22} = |\Gamma| \cdot e^{j(2\Theta - \alpha \pm \pi)}$ . Тогда матрицу рассеяния СЦ, можно записать в виде:

$$[\mathbf{S}] = \begin{bmatrix} |\Gamma| \cdot e^{j\alpha} & \sqrt{1-|\Gamma|^2} \cdot e^{j\Theta} \\ \sqrt{1-|\Gamma|^2} \cdot e^{j\Theta} & |\Gamma| \cdot e^{j(2\Theta - \alpha \pm \pi)} \end{bmatrix}.$$

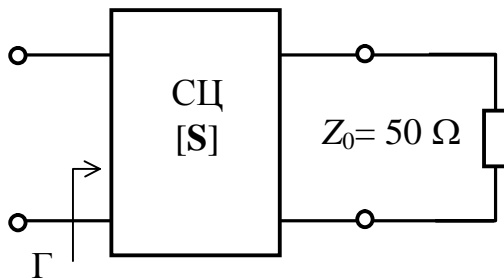


Рисунок 33 – Реактивная СЦ

Таким образом, матрицу  $[\mathbf{S}]$  реактивной СЦ, нагруженной на  $Z_0$ , можно охарактеризовать всего тремя вещественными параметрами (вместо восьми):  $|\Gamma|$ ,  $\alpha$  и  $\Theta$ .

Рассмотрим условия недиссипативности и реактивности четырехполюсника в терминах классических матриц.

Для цепи без потерь (недиссипативной цепи) можно записать:

$$P_{\text{погл}} = [\mathbf{I}]^+ \cdot \frac{1}{2} ([\mathbf{Z}] + [\mathbf{Z}]^+) \cdot [\mathbf{I}] = [\mathbf{I}]^+ \cdot [\mathbf{D}_Z] \cdot [\mathbf{I}] = 0,$$

т.е.  $[\mathbf{D}_Z] = 0 \Rightarrow [\mathbf{Z}] = -[\mathbf{Z}]^+$ .

Для реактивной цепи:  $[\mathbf{Z}] = -[\mathbf{Z}]^+$  и  $[\mathbf{Z}] = [\mathbf{Z}]_t$ .

Если представить матрицу  $[\mathbf{Z}]$  в виде:

$$[\mathbf{Z}] = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} + jx_{11} & r_{12} + jx_{12} \\ r_{21} + jx_{21} & r_{22} + jx_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = [\mathbf{R}] + j[\mathbf{X}].$$



Транспонированная матрица  $[\mathbf{Z}]_t = ([\mathbf{R}] + j[\mathbf{X}])_t = [\mathbf{R}]_t + j[\mathbf{X}]_t$ ;

Эрмитово-сопряженная матрица  $[\mathbf{Z}]^+ = ([\mathbf{R}] + j[\mathbf{X}])^*_t = [\mathbf{R}]_t - j[\mathbf{X}]_t$ .

Из условия реактивности цепи, получаем  $[\mathbf{R}] + j[\mathbf{X}] = -[\mathbf{R}]_t + j[\mathbf{X}]_t =$   
 $= [\mathbf{R}]_t + j[\mathbf{X}]_t$ .

Для мнимой части матрицы  $[\mathbf{Z}]$ :  $[\mathbf{X}] = [\mathbf{X}]_t$ .

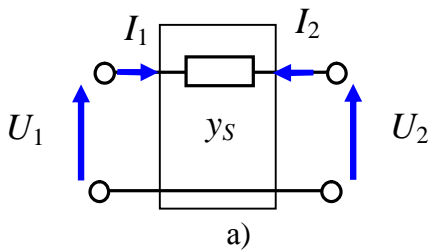
Эти выражения приводят к тому, что  $[\mathbf{R}]$  должна равняться 0, и, следовательно, условия реактивности цепи будут выглядеть следующим образом:  $[\mathbf{Z}] = j[\mathbf{X}]$  и  $[\mathbf{X}] = [\mathbf{X}]_t$ , т.е. матрица  $[\mathbf{Z}]$  для реактивной цепи содержит

только мнимые части (реактивные):  $[\mathbf{Z}] = j \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{12} & x_{22} \end{bmatrix}$ . Также видно, что

реактивный четырехполюсник характеризуется тремя вещественными параметрами.

### 1.11 Матрицы рассеяния простейших четырехполюсников и их соединений

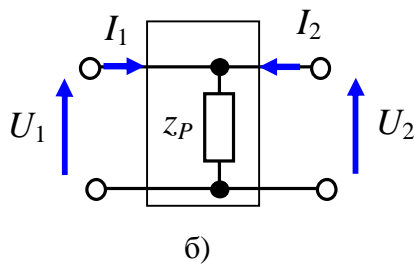
Рассмотрим матрицы рассеяния простейших элементов (рис. 34).



$$y_S = Y_S Z_0 = Z_0 / Z_S$$

Матрица  $[\mathbf{z}]$  не существует

$$[\mathbf{y}] = \begin{bmatrix} y_S & -y_S \\ -y_S & y_S \end{bmatrix}$$



$$z_P = Z_P / Z_0 = Z_0 / Y_P$$

Матрица  $[\mathbf{y}]$  не существует

$$[\mathbf{z}] = \begin{bmatrix} z_P & z_P \\ z_P & z_P \end{bmatrix}$$

Рисунок 34 – Последовательное (а) и параллельное (б) включение двухполюсного элемента

Для схемы на рис. 34, а, используем связь матриц  $[\mathbf{y}]$  и  $[\mathbf{S}]$ :

$$D_{yS} = (1+y_S)(1+y_S) - y_S^2 = 1 + 2y_S;$$

$$S_{11} = S_{22} = \frac{(1-y_S)(1+y_S) + y_S^2}{1+2y_S} = \frac{1}{1+2y_S}; \quad S_{12} = S_{21} = \frac{2y_S}{1+2y_S}.$$

Аналогично для  $z_S = 1/y_S$ :

$$S_{11} = S_{22} = \frac{1}{1 + 2/z_S} = \frac{z_S}{2 + z_S}; \quad S_{12} = S_{21} = \frac{2/z_S}{1 + 2/z_S} = \frac{2}{2 + z_S}.$$

Для схемы на рис. 34, б, используем связь матриц  $[z]$  и  $[S]$ :

$$D_{zS} = (1 + z_P)^2 - z_P^2 = 1 + 2z_P;$$

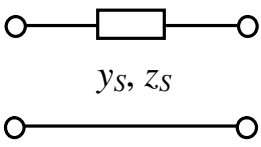
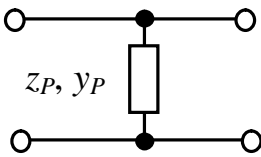
$$S_{11} = S_{22} = \frac{z_P^2 - 1 - z_P^2}{1 + 2z_P} = \frac{-1}{1 + 2z_P}; \quad S_{12} = S_{21} = \frac{2z_P}{1 + 2z_P}.$$

Аналогично для  $y_P = 1/z_P$ :

$$S_{11} = S_{22} = \frac{-1}{1 + 2/y_P} = \frac{-y_P}{2 + y_P}; \quad S_{12} = S_{21} = \frac{2/y_P}{1 + 2/y_P} = \frac{2}{2 + y_P}.$$

Сведем полученные результаты в таблицу.

Таблица 1.3 – Параметры рассеяния простых четырехполюсников

Цепь	$[Z]$	$[Y]$	$[S]$
 <p><math>y_S, z_S</math></p>	Не существует	$[y] = \begin{bmatrix} y_S & -y_S \\ -y_S & y_S \end{bmatrix}$	$[S] = \frac{1}{2 + z_S} \begin{bmatrix} z_S & 2 \\ 2 & z_S \end{bmatrix}$ $[S] = \frac{1}{1 + 2y_S} \begin{bmatrix} 1 & 2y_S \\ 2y_S & 1 \end{bmatrix}$
 <p><math>z_P, y_P</math></p>	$[z] = \begin{bmatrix} z_P & z_P \\ z_P & z_P \end{bmatrix}$	Не существует	$[S] = \frac{1}{1 + 2z_P} \begin{bmatrix} -1 & 2z_P \\ 2z_P & -1 \end{bmatrix}$ $[S] = \frac{1}{2 + y_P} \begin{bmatrix} -y_P & 2 \\ 2 & -y_P \end{bmatrix}$

Для каскадного соединения двух четырехполюсников  $[S']$  и  $[S'']$  получить общее выражение для S-параметров можно используя связь матриц  $[A]$  и  $[S]$  между собой.

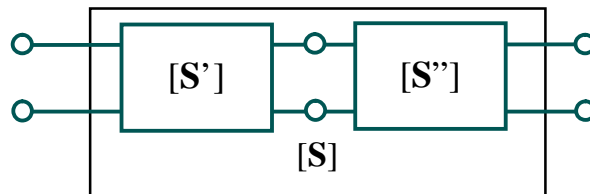


Рисунок 35 – Каскадное соединения двух четырехполюсников

Опустив промежуточные результаты, запишем:

$$S_{11} = S'_{11} + \frac{S''_{11}S'_{12}S'_{21}}{D}; \quad S_{12} = \frac{S'_{12}S''_{21}}{D};$$

$$S_{21} = \frac{S'_{21}S''_{21}}{D}; \quad S_{22} = S''_{22} + \frac{S'_{22}S'_{12}S'_{21}}{D},$$

где  $D = 1 - S'_{22}S''_{11}$ .

Можно эти выражения записать по-другому:

$$S_{11} = \frac{S'_{11} - S''_{11}\Delta'}{D}; \quad S_{12} = \frac{S'_{12}S''_{21}}{D};$$

$$S_{21} = \frac{S'_{21}S''_{21}}{D}; \quad S_{22} = \frac{S''_{22} - S'_{22}\Delta''}{D},$$

где  $\Delta' = S'_{11}S'_{22} - S'_{12}S'_{21}$ ;  $\Delta'' = S''_{11}S''_{22} - S''_{12}S''_{21}$ .

### 1.12 Анализ СВЧ цепей с применением общей теории многополюсников

Выражения для матриц рассеяния других соединений четырехполюсников между собой (последовательного, параллельного и т.д.) можно найти в литературе (например, [1]), но они достаточно сложные. Проще вычислить суммарную матрицу рассеяния, используя преобразования параметров, приведенные ранее.

Следует отметить, что существуют программы машинного анализа цепей, основанные на алгоритмах пересчета параметров матриц. Однако, программа, использующая прямые выражения для  $[S]$  различных типов соединений, более экономичная.

Рассмотрим примеры анализа некоторых структурных схем СВЧ усилителей с применением S-параметров.

#### Усилительный каскад с корректирующим двухполюсником на входе

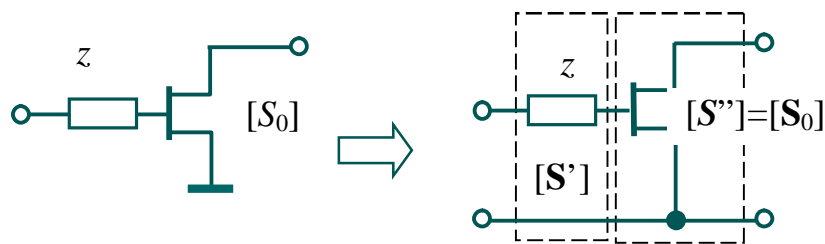


Рисунок 36 – Усилительный каскад с тремя корректирующими двухполюсниками

Запишем матрицы рассеяния для каждого четырехполюсника (рис. 34):

$$[S'] = \begin{bmatrix} \frac{z}{2+z} & \frac{2}{2+z} \\ \frac{2}{2+z} & \frac{z}{2+z} \end{bmatrix} - \text{матрица рассеяния корректирующей цепи,}$$

$$[S''] = \begin{bmatrix} s_{110} & s_{120} \\ s_{210} & s_{220} \end{bmatrix} - \text{матрица рассеяния транзистора.}$$

Используя формулы для каскадного соединения, в результате получим выражения для параметров рассеяния каскада:

$$s_{11} = \frac{1}{D_1} \left[ s_{110} + z \cdot \frac{1}{2} (1 - s_{110}) \right]; \quad s_{12} = \frac{s_{120}}{D_1};$$

$$s_{21} = \frac{s_{210}}{D_1}; \quad s_{22} = \frac{1}{D_1} \left[ s_{220} + z \cdot \frac{1}{2} (s_{220} - \Delta_0) \right],$$

где  $D_1 = 1 + z \cdot \frac{1}{2} (1 - s_{110})$ ;  $\Delta_0 = s_{110}s_{220} - s_{120}s_{210}$ ;  $z = Z/Z_0$  – нормированный импеданс корректирующей цепи. Определитель матрицы  $[S]$  также будет иметь вид:  $\Delta = \frac{1}{D_1} \left[ \Delta_0 + z \cdot \frac{1}{2} (s_{220} - \Delta_0) \right]$ .

### Усилительный каскад с цепью параллельной ОС

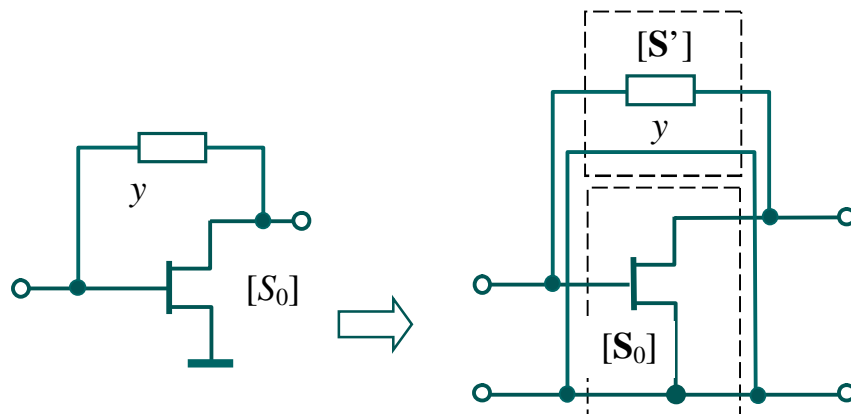


Рисунок 37– Усилительный каскад с параллельной ОС  $y$

Используя формулы для параллельного соединения двух четырехполюсников, можно записать  $[Y_{\Sigma}] = [Y_0] + [Y_P]$ , где  $[Y_0]$  – матрица проводимости транзистора, которая может быть рассчитана по известной матрице  $[S_0]$ .  $[Y_P] = \begin{bmatrix} y & -y \\ -y & y \end{bmatrix}$  – матрица проводимости четырехполюсника ОС.

Далее, выполнив переход от  $Y$ -матрицы к  $S$ -матрице, можно записать:

$$[\mathbf{S}_\Sigma] = \{2[\mathbf{1}] - [\mathbf{Y}_P] - 2([\mathbf{1}] - [\mathbf{S}_0])^{-1}\} \{2([\mathbf{1}] - [\mathbf{S}_0])^{-1} + [\mathbf{Y}_P]\}^{-1}$$

Выполнив все расчеты, в результате получим:

$$s_{ii} = \frac{1}{D_6} \left[ s_{ii0} + y \frac{1}{2} (N_P - M_P) \right], \quad i=1,2;$$

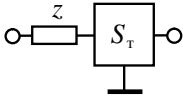
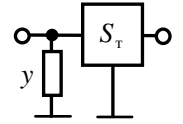
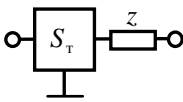
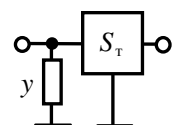
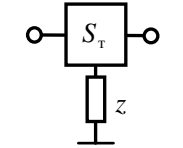
$$s_{ij} = \frac{1}{D_6} \left( s_{ij0} + y \frac{1}{2} N_P \right), \quad i,j=1,2; \quad i \neq j;$$

$$\Delta = \frac{1}{D_6} \left[ \Delta_0 + y \frac{1}{2} (M_P - 2N_P) \right];$$

где  $D_6 = 1 + y \frac{1}{2} M_P$ ;  $M_P = 2 + s_{110} + s_{220} - s_{120} - s_{210}$ ;  $N_P = 1 + s_{110} + s_{220} + \Delta_0$ .

Аналогично можно получить формулы для всех шести возможных способов подключения корректирующего двухполюсника к транзистору. Результирующие выражения сведены в таблицу 1.5.

Таблица 1.5 – Параметры рассеяния усилителя с двухполюсной КЦ

Цепь	Параметры рассеяния
<p>1</p> 	$s_{11} = \frac{1}{D_1} \left[ s_{110} + z \cdot \frac{1}{2} (1 - s_{110}) \right]; \quad s_{12} = \frac{s_{120}}{D_1}; \quad s_{21} = \frac{s_{210}}{D_1};$ $s_{22} = \frac{1}{D_1} \left[ s_{220} + z \cdot \frac{1}{2} (s_{220} - \Delta_0) \right];$ $\Delta = \frac{1}{D_1} \left[ \Delta_0 + z \cdot \frac{1}{2} (s_{220} - \Delta_0) \right]; \quad D_1 = 1 + z \cdot \frac{1}{2} (1 - s_{110}).$
<p>2</p> 	$s_{11} = \frac{1}{D_2} \left[ s_{110} - y \cdot \frac{1}{2} (1 + s_{110}) \right]; \quad s_{12} = \frac{s_{120}}{D_2}; \quad s_{21} = \frac{s_{210}}{D_2};$ $s_{22} = \frac{1}{D_2} \left[ s_{220} + y \cdot \frac{1}{2} (\Delta_0 + s_{220}) \right];$ $\Delta = \frac{1}{D_2} \left[ \Delta_0 - y \cdot \frac{1}{2} (\Delta_0 + s_{220}) \right]; \quad D_2 = 1 + y \cdot \frac{1}{2} (1 + s_{110}).$
<p>3</p> 	$s_{11} = \frac{1}{D_3} \left[ s_{110} + z \cdot \frac{1}{2} (s_{110} - \Delta_0) \right]; \quad s_{12} = \frac{s_{120}}{D_3}; \quad s_{21} = \frac{s_{210}}{D_3};$ $s_{22} = \frac{1}{D_3} \left[ s_{220} + z \cdot \frac{1}{2} (1 - s_{220}) \right];$ $\Delta = \frac{1}{D_3} \left[ \Delta_0 + z \cdot \frac{1}{2} (s_{110} - \Delta_0) \right]; \quad D_3 = 1 + z \cdot \frac{1}{2} (1 - s_{220}).$
<p>4</p> 	$s_{11} = \frac{1}{D_4} \left[ s_{110} + y \cdot \frac{1}{2} (\Delta_0 + s_{110}) \right]; \quad s_{12} = \frac{s_{120}}{D_4}; \quad s_{21} = \frac{s_{210}}{D_4};$ $s_{22} = \frac{1}{D_4} \left[ s_{220} - y \cdot \frac{1}{2} (1 + s_{220}) \right];$ $\Delta = \frac{1}{D_4} \left[ \Delta_0 - y \cdot \frac{1}{2} (\Delta_0 + s_{110}) \right]; \quad D_4 = 1 + y \cdot \frac{1}{2} (1 + s_{220}).$
<p>5</p> 	$s_{ii} = \frac{1}{D_5} \left[ S_{i0} + z \frac{1}{2} (M_S - N_S) \right], \quad i=1, 2; \quad s_{ij} = \frac{1}{D_5} \left( S_{ij0} + z \frac{1}{2} N_S \right), \quad i, j=1, 2;$ $i \neq j;$ $\Delta = \frac{1}{D_5} \left[ \Delta_0 + z \frac{1}{2} (M_S - 2N_S) \right]; \quad D_5 = 1 + z \frac{1}{2} M_S;$ $M_S = 2 - s_{110} - s_{120} - s_{210} - s_{220}; \quad N_S = 1 - s_{110} - s_{220} + \Delta_0.$

Продолжение таблицы 1.5

Цепь	Параметры рассеяния
<p>6</p> 	$s_{ii} = \frac{1}{D_6} \left[ s_{ii0} + y \frac{1}{2} (N_P - M_P) \right], \quad i=1,2; \quad s_{ij} = \frac{1}{D_6} \left( s_{ij0} + y \frac{1}{2} N_P \right), \quad i,j=1,2;$ $i \neq j;$ $\Delta = \frac{1}{D_6} \left[ \Delta_0 + y \frac{1}{2} (M_P - 2N_P) \right]; \quad D_6 = 1 + y \frac{1}{2} M_P;$ $M_P = 2 + s_{110} + s_{220} - s_{120} - s_{210}; \quad N_P = 1 + s_{110} + s_{220} + \Delta_0.$
Обозначения	$S_T = [s_{ij0}]; \quad \Delta_0 = s_{110}s_{220} - s_{120}s_{210}; \quad z = Z/Z_0; \quad y = Z_0/Y.$

Итак, S-параметры и определитель матрицы [S] усилительного каскада с двухполюсной цепью коррекции, можно представить в виде дробно-линейной функции (ДЛФ) вида:

$$s_{ij} = \frac{a_{ij} + b_{ij}w}{c + dw}; \quad \Delta = \frac{a_\Delta + b_\Delta w}{c + dw},$$

где  $w = z$  или  $w = y$  – нормированные сопротивление или проводимость корректирующей цепи, соответственно. Коэффициенты ДЛФ представляют собой комплексные параметры, зависящие S-параметров активного элемента.

### Усилитель с реактивными СЦ на входе и выходе

Рассмотрим еще один часто встречающийся на практике пример усилителя с реактивными СЦ на входе и выходе активного элемента (см. рис. 38). СЦ на входе и выходе трансформируют сопротивление генератора и нагрузки в оптимальные импедансы для входа (выхода) транзистора с целью обеспечения режима максимальной передачи мощности.

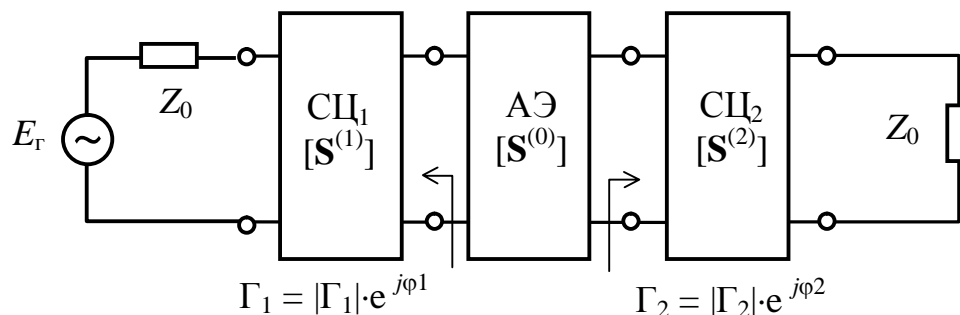


Рисунок 38 – Усилитель с СЦ на входе и выходе

Запишем параметры рассеяния для каждого четырехполюсника.

$$\text{Для входной СЦ: } [\mathbf{S}^{(1)}] = \begin{bmatrix} -|\Gamma_1| \cdot e^{j(\varphi_1+2\alpha_1)} & \sqrt{1-|\Gamma_1|^2} \cdot e^{j\alpha_1} \\ \sqrt{1-|\Gamma_1|^2} \cdot e^{j\alpha_1} & \Gamma_1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Для выходной СЦ: } [\mathbf{S}^{(2)}] = \begin{bmatrix} \Gamma_2 & \sqrt{1-|\Gamma_2|^2} \cdot e^{j\alpha_2} \\ \sqrt{1-|\Gamma_2|^2} \cdot e^{j\alpha_2} & -|\Gamma_2| \cdot e^{j(\varphi_2-2\alpha_2)} \end{bmatrix}.$$

$$\text{Для транзистора: } [\mathbf{S}^{(0)}] = \begin{bmatrix} s_{110} & s_{120} \\ s_{210} & s_{220} \end{bmatrix}.$$

Применив формулы для каскадного соединения четырехполюсников, в результате для схемы на рис. 3б получим:

$$s_{11} = e^{j2\alpha_1} \frac{s_{110} - \Gamma_1^* + \Gamma_1^* \Gamma_2 s_{220} - \Gamma_2 \Delta_0}{1 - \Gamma_1 s_{110} - \Gamma_2 s_{220} + \Gamma_1 \Gamma_2 \Delta_0}; \quad s_{12} = e^{j(\alpha_1+\alpha_2)} \frac{s_{120} \sqrt{1-|\Gamma_1|^2} \sqrt{1-|\Gamma_2|^2}}{D};$$

$$s_{21} = e^{j(\alpha_1+\alpha_2)} \frac{s_{210} \sqrt{1-|\Gamma_1|^2} \sqrt{1-|\Gamma_2|^2}}{D}; \quad s_{22} = e^{j2\alpha_2} \frac{s_{220} - \Gamma_2^* + \Gamma_1 \Gamma_2^* s_{110} - \Gamma_1 \Delta_0}{D},$$

где  $D = 1 - \Gamma_1 s_{110} - \Gamma_2 s_{220} + \Gamma_1 \Gamma_2 \Delta_0$ ;  $\Delta_0 = s_{110} s_{220} - s_{120} s_{210}$ .

Отсюда видно, что величины модулей коэффициентов отражения  $|s_{11}|$ ,  $|s_{22}|$  и коэффициентов передачи  $|s_{12}|$ ,  $|s_{21}|$  не зависят от фазового угла коэффициентов передачи СЦ  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и определяются только величинами коэффициентов отражения на входе (выходе) СЦ  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$ .



Учебное пособие

**М.В. Черкашин, Л.И. Бабак**

**ОСНОВЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ СВЧ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ УСТРОЙСТВ**

Коррекция, верстка - СКБ «Смена» им. Т.И. Семеновой (ТУСУР)

Дизайн обложки - А.И. Секачёва